

Chapitre 1 : Calcul algébrique

Feuille d'exercices n°4 : Racines carrées

Exercices d'applications (type interro)

Exercice 1 : Simplifier

1. $\sqrt{44}$ 2. $\sqrt{52}$ 3. $\sqrt{75}$ 4. $\sqrt{128}$ 5. $\sqrt{99}$ 6. $\sqrt{242}$ 7. $\sqrt{32}$ 8. $\sqrt{27}$ 9. $\sqrt{250}$

Exercice 2 : Développement (le retour)

1. $(\sqrt{5} - 1)^2$ 2. $(\sqrt{7} + 3)^2$ 3. $(\sqrt{24} - 5)^2$ 4. $(2\sqrt{5} - 3)^2$ 5. $(\sqrt{8} - 3)(\sqrt{8} + 3)$ 6. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

Exercice 3 : Factorisation (le retour)

1. $x^2 - 6$ 2. $x^2 - 17$ 3. $(x + 2)^2 - 5$ 4. $(2x + 3)^2 - 7$ 5. $(3x + 1)^2 - 8$ 6. $x^4 - 1$ 7. $4x^4 - 9$

Exercice 4 : Donner le signe

1. $3\sqrt{5} - 7$ 2. $7\sqrt{2} - 5$ 3. $5\sqrt{3} - 6$ 4. $8\sqrt{3} - 12$ 5. $9\sqrt{2} - 13$ 6. $4\sqrt{3} - 7$

Exercice 5 : Simplifier

1. $\frac{\sqrt{50} - 5}{10}$ 2. $\frac{8 + \sqrt{32}}{6}$ 3. $\frac{9 - \sqrt{18}}{9}$ 4. $\frac{6 - \sqrt{24}}{3}$

Exercices avancés

Exercice 1 :

Simplifier $\sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + 6}}}}}}}$

Exercice 2 :

Un élève développe : $(3 - 2\sqrt{5})^2$ et trouve : $29 - 12\sqrt{5}$

Il conclut alors : $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} = 3 - 2\sqrt{5}$.

A-t-il raison ?

Exercice 3 :

On considère le nombre $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

1. Montrer que $x^2 = x + 1$

2. En déduire que $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}}}$

Exercice 4 : on considère l'expression $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

1. A quelles conditions sur a , b et c l'expression est-elle bien définie ?

2. Simplifier l'expression.

Corrections des exercices

Exercices d'applications :

Exercice 1 :

1. $\sqrt{44} = \sqrt{2^2 \times 11} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$
2. $\sqrt{52} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$
3. $\sqrt{75} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
4. $\sqrt{128} = \sqrt{8^2 \times 2} = \sqrt{8^2} \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
5. $\sqrt{99} = \sqrt{3^2} \sqrt{11} = 3\sqrt{11}$
6. $\sqrt{242} = \sqrt{11^2} \times \sqrt{2} = 11\sqrt{2}$
7. $\sqrt{32} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
8. $\sqrt{27} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
9. $\sqrt{250} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{10} = 5\sqrt{10}$

Exercice 2 :

1. $(\sqrt{5} - 1)^2 = \sqrt{5}^2 - 2 \times \sqrt{5} \times 1 + 1^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$
2. $(\sqrt{7} + 3)^2 = \sqrt{7}^2 + 2 \times \sqrt{7} \times 3 + 3^2 = 7 + 6\sqrt{7} + 9 = 16 + 6\sqrt{7}$
3. $(\sqrt{24} - 5)^2 = \sqrt{24}^2 - 2 \times \sqrt{24} \times 5 + 5^2 = 24 - 10\sqrt{24} + 25 = 49 - 10\sqrt{24}$
4. $(2\sqrt{5} - 3)^2 = (2\sqrt{5})^2 - 2 \times 2\sqrt{5} \times 3 + 3^2 = 4 \times 5 - 12\sqrt{5} + 9 = 20 - 12\sqrt{5} + 9 = 29 - 12\sqrt{5}$
5. $(\sqrt{8} - 3)(\sqrt{8} + 3) = \sqrt{8}^2 - 3^2 = 8 - 9 = -1$
6. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \sqrt{2}^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$

Exercice 3 :

1. $x^2 - 6 = x^2 - \sqrt{6}^2 = (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$
2. $x^2 - 17 = x^2 - \sqrt{17}^2 = (x - \sqrt{17})(x + \sqrt{17})$
3. $(x + 2)^2 - 5 = (x + 2)^2 - \sqrt{5}^2 = ((x + 2) - \sqrt{5})((x + 2) + \sqrt{5}) = (x + 2 - \sqrt{5})(x + 2 + \sqrt{5})$
4. $(2x + 3)^2 - 7 = (2x + 3)^2 - \sqrt{7}^2 = ((2x + 3) - \sqrt{7})((2x + 3) + \sqrt{7}) = (2x + 3 - \sqrt{7})(2x + 3 + \sqrt{7})$
5. $(3x + 1)^2 - 8 = (3x + 1)^2 - \sqrt{8}^2 = ((3x + 1) - \sqrt{8})((3x + 1) + \sqrt{8}) = (3x + 1 - \sqrt{8})(3x + 1 + \sqrt{8})$
6. $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$
7. $4x^4 - 9 = (2x^2)^2 - 3^2 = (2x^2 - 3)(2x^2 + 3) = (\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3})(2x^2 + 3)$

Exercice 4 :

$3\sqrt{5} - 7 = \frac{(3\sqrt{5} - 7)(3\sqrt{5} + 7)}{3\sqrt{5} + 7} = \frac{9 \times 5 - 7^2}{3\sqrt{5} + 7} = \frac{-2}{3\sqrt{5} + 7} \leq 0$ car $-2 \leq 0$ et $3\sqrt{5} + 7 \geq 0$ comme somme de deux nombres positifs. Donc $3\sqrt{5} - 7 \leq 0$.

$7\sqrt{2} - 5 = \frac{(7\sqrt{2} - 5)(7\sqrt{2} + 5)}{7\sqrt{2} + 5} = \frac{49 \times 2 - 5^2}{7\sqrt{2} + 5} = \frac{73}{7\sqrt{2} + 5} \geq 0$ car $73 \geq 0$ et $7\sqrt{2} + 5 \geq 0$ comme somme de deux nombres positifs. Donc $7\sqrt{2} - 5 \geq 0$.

$5\sqrt{3} - 6 = \frac{(5\sqrt{3} - 6)(5\sqrt{3} + 6)}{5\sqrt{3} + 6} = \frac{25 \times 3 - 6^2}{5\sqrt{3} + 6} = \frac{39}{5\sqrt{3} + 6} \geq 0$ car $39 \geq 0$ et $5\sqrt{3} + 6 \geq 0$ comme somme de deux nombres positifs. Donc $5\sqrt{3} - 6 \geq 0$.

$8\sqrt{3} - 12 = \frac{(8\sqrt{3} - 12)(8\sqrt{3} + 12)}{8\sqrt{3} + 12} = \frac{64 \times 3 - 12^2}{8\sqrt{3} + 12} = \frac{192 - 144}{8\sqrt{3} + 12} = \frac{48}{8\sqrt{3} + 12} \geq 0$ car $48 \geq 0$ et $8\sqrt{3} + 12 \geq 0$ comme somme de deux nombres positifs. Donc $8\sqrt{3} - 12 \geq 0$.

$9\sqrt{2} - 13 = \frac{(9\sqrt{2} - 13)(9\sqrt{2} + 13)}{9\sqrt{2} + 13} = \frac{81 \times 2 - 13^2}{9\sqrt{2} + 13} = \frac{162 - 169}{9\sqrt{2} + 13} = \frac{-7}{9\sqrt{2} + 13} \leq 0$ car $-7 \leq 0$ et $9\sqrt{2} + 13 \geq 0$ comme somme de deux nombres positifs. Donc $9\sqrt{2} - 13 \leq 0$.

$4\sqrt{3} - 7 = \frac{(4\sqrt{3} - 7)(4\sqrt{3} + 7)}{4\sqrt{3} + 7} = \frac{16 \times 3 - 7^2}{4\sqrt{3} + 7} = \frac{48 - 49}{4\sqrt{3} + 7} = \frac{-1}{4\sqrt{3} + 7} \leq 0$ car $-1 \leq 0$ et $4\sqrt{3} + 7 \geq 0$ comme somme de deux nombres positifs. Donc $4\sqrt{3} - 7 \leq 0$.

Exercice 5 :

1. $\frac{\sqrt{50} - 5}{10} = \frac{5\sqrt{2} - 5}{10} = \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{5 \times 2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$
2. $\frac{8 + \sqrt{32}}{6} = \frac{8 + \sqrt{42}}{6} = \frac{2(4 + 2\sqrt{2})}{2 \times 3} = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{3}$
3. $\frac{9 - \sqrt{18}}{9} = \frac{9 - 3\sqrt{2}}{9} = \frac{3(3 - \sqrt{2})}{3 \times 3} = \frac{3 - \sqrt{2}}{3}$
4. $\frac{6 - \sqrt{24}}{3} = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{6} = \frac{2(3 - \sqrt{6})}{2 \times 3} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$

Exercices avancés :

Exercice 1 : On a $\sqrt{30+6} = \sqrt{36} = 6$ donc :

$$\begin{aligned} & \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + 6}}}}}}} = \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + 6}}}}} = \\ & \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + 6}}}} = \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + 6}}} = \sqrt{30 + \sqrt{30 + 6}} = \\ & \sqrt{30 + \sqrt{30 + 6}} = \sqrt{30 + 6} = 6 \end{aligned}$$

Exercice 2 :

NON ! L'élève a écrit " $\sqrt{a^2} = a$ " ce qui n'est pas vrai si a est négatif.

On sait en plus d'après le cours que $\sqrt{a}$ est positif (avec a positif aussi !)

Or ici $3 - 2\sqrt{5} = \frac{(3 - 2\sqrt{5})(3 + 2\sqrt{5})}{3 + 2\sqrt{5}} = \frac{9 - 20}{3 + 2\sqrt{5}} = \frac{-11}{3 + 2\sqrt{5}} \leq 0$ donc cela ne peut être vrai !

Correction : $\sqrt{28 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5} - 3$

Exercice 3 :

$$1. \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = x + 1$$

$$2. \text{ On a } x^2 = 1 + x \text{ et } x \text{ est positif donc } x = \sqrt{1 + x} \text{ en remplaçant } x \text{ par } \sqrt{1 + x} \text{ on a : } x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} \text{ etc..}$$

Exercice 4 :

1. Il faut que $b^2 - 4ac$ soit positif pour que la racine soit bien définie.

$$2. \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$