

Chapitre 1 : Calcul algébrique

Feuille d'exercices n°5 : Factorisation avancée

Calcul algébrique : Compléments d'identités remarquables.

1. Montrer que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
2. Montrer que $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
3. Montrer que $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$
4. Montrer que $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$
5. Montrer que $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
6. Montrer que $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
7. Factoriser $x^3 - 1$ et $x^3 + 1$ (n'oubliez pas que $-1 = (-1)^3$)

Ces formules sont très utiles à connaître pour franchir un cap en mathématiques.

Exercice 1 : Factorisation éclair

1. Développer $(x - p)(x - q)$ proprement.
2. En remarquant que $7 = 3 + 4$ et $12 = 3 \times 4$ déduire une factorisation de $x^2 - 7x + 12$
3. Factoriser : 1. $x^2 - 9x + 18$ 2. $x^2 - 14x + 40$ 3. $x^2 - 10x + 21$

Exercice 2 : Factorisation $a^3 + b^3$ et $a^3 - b^3$

1. Factoriser $a^3 - b^3$ et $a^3 + b^3$
2. En remarquant que $1001 = 10^3 + 1$ décomposer 1001 en un produit de 2 entiers différents de 1 et 1001.
3. Décomposer en un produit de deux nombres de minimum 3 chiffres : 1000008.
4. Décomposer en un produit de deux nombres de minimum 3 chiffres : 8000027
5. Décomposer en un produit de deux nombres de minimum 3 chiffres : 7999999

Exercice 3 : Factoriser $n^5 - n$ au maximum

Exercice 4 : Factoriser $n^7 - n$ au maximum

Exercice 5 : Décomposer 11111111 en un produit de deux entiers de minimum 3 chiffres.

Exercice 6 : Factoriser $n^4 + 1$

Exercice 7 : (difficile) Factoriser $n^5 + n + 1$

Exercice 8 : Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre : 1004006004001

Exercice 9 : Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre : 1007021035035021007001

Exercice 10 : Méthode de factorisation

- a) Factoriser l'entier : $n^4 + n^2 + 1$
- b) En déduire une factorisation de 10101
- c) Factoriser 1. $n^4 + 2n^2 + 9$ 2. $x^4 - 3x^2 + 4$

Corrections des exercices

Calcul algébrique : Compléments d'identités remarquables.

1. Montrer que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

2. Montrer que $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

$$\begin{aligned}(a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

3. Montrer que $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$

$$\begin{aligned}(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) &= a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4 \\ &= a^4 - b^4\end{aligned}$$

4. Montrer que $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$

$$\begin{aligned}(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) &= a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 - a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5 \\ &= a^5 - b^5\end{aligned}$$

5. Montrer que $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$\begin{aligned}(a + b)^4 &= (a + b)^2(a + b)^2 \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

6. Montrer que $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + b + c)(a + b + c) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + ab + ba + ac + ca + bc + cb \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

7. Factoriser $x^3 - 1$ et $x^3 + 1$

$$\begin{aligned}x^3 - 1 &= x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ x^3 + 1 &= x^3 - (-1)^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1)\end{aligned}$$

Exercice 1 :

1. $(x-p)(x-q) = x^2 - qx - px + pq = x^2 - (p+q)x + pq$
2. $x^2 - 7x + 12 = x^2 - (3+4)x + 3 \times 4 = (x-3)(x-4)$
3. $x^2 - 9x + 18 = (x-6)(x-3)$ (en remarquant, sans l'écrire que $9 = 6 + 3$ et $18 = 6 \times 3$)
4. $x^2 - 14x + 40 = (x-10)(x-4)$ (en remarquant, sans l'écrire que $14 = 10 + 4$ et $40 = 10 \times 4$)
5. $x^2 - 10x + 21 = (x-7)(x-3)$ (en remarquant, sans l'écrire que $10 = 7 + 3$ et $21 = 7 \times 3$)

Exercice 2 :

1. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b)$ et $a^3 + b^3 = a^3 - (-b)^3 = (a - (-b))(a^b + a(-b) + (-b)^2) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
2. $1001 = 1000 + 1 = 10^3 + 1^3 = (10+1)(10^2 - 10 + 1) = 11 \times 91$
3. $1008 = 10^3 + 2^3 = (10+2)(100 - 20 + 4) = 12 \times 84$
4. $8000027 = 8 \cdot 10^6 + 3^3 = (200)^3 + 3^3 = (200+3)(200^2 - 600 + 9) = 203 \times 39409$
5. $7999999 = 8000000 - 1 = 200^3 - 1^3 = 199 \times (200^2 + 200 + 1) = 199 \times 40201$

Exercice 3 :

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$$

Exercice 4 :

$$n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^3 - 1)(n^3 + 1) =$$

$$n(n-1)(n^2 + n + 1)(n+1)(n^2 - n + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$$

Exercice 5 :

$$111111111 = 111000000 + 111000 + 111 = 111 \times (100000 + 100 + 1) = 111 \times 1001001$$

Exercice 6 :

$$n^4 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 - 2n^2 = (n^2 + 1)^2 - 2n^2 = (n^2 - \sqrt{2}n + 1)(n^2 + \sqrt{2}n + 1)$$

Exercice 7 : (Très astucieux)

$$n^5 + n + 1 = n^2(n^3 - 1) + n^2 + n + 1 = n^2(n^3 - 1) + n^2 + n + 1 = n^2(n-1)(n^2 + n + 1) = (n^2 + n + 1)(n^3 - n^2 + 1)$$

Exercice 8 :

On remarque que :

$$1004006004001 = (10^3)^4 + 4 \times (10^3)^3 + 6 \times (10^3)^2 + 4 \times 10^3 + 1^4 = 1001^4 = (10^3 + 1)^4 = 1001^4 \text{ d'après les compléments d'identités remarquables. De plus } 1001 = 10^3 + 1 = (10+1) \times (10^2 - 10 + 1) = 11 \times 91. \text{ Or } 91 = 7 \times 13. \text{ Donc } 1004006004001 = 7^4 \times 11^4 \times 13^4$$

Exercice 9 : Même chose mais puissance 5**Exercice 10 :**

1. $n^4 + n^2 + 1 = n^4 + 2n + 2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$
2. $10101 = 10^4 + 10^2 + 1 = (100 + 10 + 1)(100 - 10 + 1) = 111 \times 91$
3. (a) $n^4 + 2^2 + 9 = n^4 + 6n^2 + 9 - 4n^2 = (n^2 + 3)^2 - 4n^2 = (n^2 - 2n + 3)(n^2 + 2n + 3)$
 (b) $x^4 - 3x^2 + 4 = x^2 + 4x^2 + 4 - 7x^2 = (x^2 + 2)^2 - 7x^2 = (x^2 - \sqrt{7}x + 2)(x^2 + \sqrt{7}x + 2)$