

Contrôle n°1 : Calcul algébrique

Partie cours

(2,5 points)

1. Donner la définition de racine carrée. (1 points)
2. Donner les 3 identités remarquables et démontrer-les. (1,5 points)

Calcul algébrique

(6 points)

Exercice 1 :

(3 points)

1. Développer : (1,5 pt)
 1. $(x-4)(x-7)$ 2. $(4x-1)^2$ 3. $(2\sqrt{7}-3)^2$
2. Factoriser : (1,5 pt)
 1. $5x^2 - 10x$ 2. $x^2 - 14$ 3. $a^4 - b^4$

Exercice 2 : Compléments identités remarquables

(1 pt)

1. Développer $(a+b)^3$ (0,5 pt)
2. Développer $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (0,5 pt)

Exercice 3 : Factorisation avancée

(2 points)

1. Factoriser $n^4 + 2n^2 + 9$ (1 pt)
2. Factoriser en produit de deux nombres de minimum 3 chiffres : 1000027 (1 pt)

Racines carrées

(2,5 points)

Exercice 1 :

(1 point)

Simplifier : 1. $\sqrt{40}$. 2. $\sqrt{72}$

Exercice 2 :

(1,5 point)

1. Donner le signe de $3\sqrt{6} - 5$ (0,75 pt)
2. Donner le signe de $4\sqrt{5} - 7$ (0,75 pt)

Équations

(9 points)

Exercice 1 : Résoudre les équations

(3 points)

1. $4x - 6 = 0$ 2. $6x - 5 = 3x + 3$ 3. $7x + 4 = 4x + 3$ 4. $4x^2 - 1 = 0$ 5. $x^2 + 1 = 0$ 6. $x^4 - 25 = 0$

Exercice 2 : Résolution de l'équation $x^2 + 2x - 48 = 0$

(1,5 point)

1. Montrer que $(x+1)^2 - 49 = x^2 + 2x - 48$ (0,5 pt)
2. En déduire les solutions de l'équation : $x^2 + 2x - 48 = 0$ (1 pt)

Exercice 3 : Résolution de l'équation $x^4 - 16x^2 + 55 = 0$

(1,5 point)

1. Montrer que $(x^2 - 8)^2 - 9 = x^4 - 16x^2 + 55$ (0,5 pt)
2. En déduire les solutions de l'équation $x^4 - 16x^2 + 55 = 0$ (1 pt)

Exercice 4 : Résoudre l'équation $x^2 - 14 + 33 = 0$

(1 point)

Exercice 5 : Résoudre l'équation $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$

(1 point)

Exercice 6 : Equations quotients Résoudre les équations : 1. $\frac{4x+3}{2x+1} = 3$ et 2. $\frac{x+2}{x+1} = x$ (1 point)

Correction :**Partie cours :**

1) Soit a un nombre **positif**, on appelle racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$ le nombre **positif** tel que $\sqrt{a}^2 = a$

2)

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Calcul algébrique :**Exercice 1 :**

1) Développer :

$$1) (x-4)(x-7) = x^2 - 4x - 7x + 28 = x^2 - 11x + 28$$

$$2) (4x-1)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2 = 16x^2 - 8x + 1$$

$$3) (2\sqrt{7}-3)^2 = 4 \times 7 - 12\sqrt{7} + 9 = 37 - 12\sqrt{7}$$

2) Factoriser :

$$1) 5x^2 - 10x = 5x(x-2)$$

$$2) x^2 - 14 = x^2 - \sqrt{14}^2 = (x - \sqrt{14})(x + \sqrt{14})$$

$$3) a^4 - b^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$$

Exercice 2 :

$$1) (a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a+2ab+b^2) = a^3 + 2a^2b + a^2b + ab^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$2) (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

Exercice 3 :

$$1) n^4 + 2n^2 + 9 = n^4 + 6n^2 + 9 - 4n^2 = (n^2 + 3)^2 - 4n^2 = (n^2 - 2n + 3)(n^2 + 2n + 3)$$

$$2) 1000027 = 10^6 + 3^3 = (10^2)^3 + 3^3 = (10^2 + 3)(10^4 - 3 \times 10^2 + 9) = 103 \times 9709$$

Racine carrée :**Exercice 1 :**

$$1) \sqrt{40} = \sqrt{2^2 \times 10} = \sqrt{2^2} \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

$$2) \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Exercice 2 :

$$1) 3\sqrt{6} - 5 = \frac{(3\sqrt{6} - 5)(3\sqrt{6} + 5)}{3\sqrt{6} + 5} = \frac{54 - 25}{3\sqrt{6} + 5} = \frac{29}{3\sqrt{6} + 5} \geq 0$$

$$2) 4\sqrt{5} - 7 = \frac{(4\sqrt{5} - 7)(4\sqrt{5} + 7)}{4\sqrt{5} + 7} = \frac{16 \times 5 - 49}{4\sqrt{5} + 7} = \frac{14}{4\sqrt{5} + 7} \geq 0$$

Equation :

$$\text{Exercice 1 : } 1) x = \frac{2}{3} \quad 2) x = \frac{8}{3} \quad 3) x = \frac{-1}{3}$$

$$4) 4x^2 - 1 = 0 \text{ alors } (2x-1)(2x+1) = 0 \text{ soit } 2x-1 = 0 \text{ donc } x = \frac{1}{2} \text{ soit } 2x+1 = 0 \text{ donc } x = \frac{-1}{2}$$

$$5) x^2 + 1 = 0 \text{ donc } x^2 = -1 \text{ impossible car un carré est toujours positif}$$

$$6) x^4 - 25 = 0 \text{ donc } (x^2 - 5)(x^2 + 5) = 0 \text{ donc } (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x^2 + 5) = 0$$

Soit $x - \sqrt{5} = 0$ donc $x = \sqrt{5}$, soit $x + \sqrt{5} = 0$ donc $x = -\sqrt{5}$, soit $x^2 + 5 = 0$ donc $x^2 = -5$ impossible. Les solutions sont donc $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$

Exercice 2 :

$$1) (x+1)^2 - 49 = x^2 + 2x + 1 - 49 = x^2 + 2x - 48$$

$$2) x^2 + 2x - 48 = 0 \text{ or } x^2 + 2x - 48 = 0 \text{ donc } (x+1)^2 - 48 = 0 \text{ donc } (x+1 - \sqrt{48})(x+1 + \sqrt{48}) = 0 \text{ donc :}$$

Soit $x + 1 - \sqrt{48} = 0$ donc $x = -1 + \sqrt{48}$ soit $x + 1 + \sqrt{48} = 0$ donc $x = -1 - \sqrt{48}$

Exercice 3 :

1) $(x^2 - 8)^2 - 9 = x^4 - 16x^2 + 64 - 9 = x^4 - 16x^2 + 55$

2) $x^4 - 16x^2 + 55 = 0$ donc $(x^2 - 8)^2 - 9 = 0$ donc $(x^2 - 8 - 3)(x^2 - 8 + 3) = 0$ donc $(x^2 - 11)(x^2 - 5) = 0$

Donc $(x^2 - \sqrt{11})(x + \sqrt{11})(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$ donc les solutions sont :

$$x = -\sqrt{11}; -\sqrt{5}; \sqrt{5}; \sqrt{11}$$

Exercice 4 :

$x^2 - 14x + 33 = (x - 11)(x - 3)$ car $33 = 3 \times 11$ et $14 = 11 + 3$ donc $x^2 - 14x + 33 = 0$ alors $(x - 11)(x - 3) = 0$ donc soit $x = 3$ soit $x = 11$

Exercice 5 :

$x^4 - 9x^2 + 14 = (x^2 - 7)(x^2 - 2)$ car $14 = 7 \times 2$ et $9 = 7 + 2$ donc si $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$ alors $(x^2 - 7)(x^2 - 2) = 0$ donc $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$

Donc $x = -\sqrt{7}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{7}$

Exercice 6 :

1) $\frac{4x+3}{2x+1} = 3$. Il faut que $x \neq \frac{-1}{2}$.

$4x + 3 = 3(2x + 1)$ donc $4x + 3 = 6x + 3$ donc $x = 0$.

2) $\frac{x+2}{x+1} = x$. Il faut que $x \neq -1$.

$x + 2 = x(x + 1)$ donc $x^2 + x = x + 2$ donc $x^2 - 2 = 0$ $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$