



Test d'entrée TW3 – Mathématiques

1^{ère} – Programme renforcé

Tout document personnel non autorisé. Calculatrice interdite

Consignes

Rédiger soigneusement et justifier toutes les étapes. Les calculs non justifiés ne seront pas acceptés.

1 Définitions

Donner une définition claire et précise des notions suivantes :

1. valeur absolue d'un réel ;
2. fonction dérivable en un point ;
3. suite arithmético-géométrique ;
4. convexité d'une fonction sur un intervalle (idée intuitive admise).

2 Exercices

Exercice 1

On suppose que (E) : $x^2 - 5x + 7 = 0$ admet pour solutions x_1 et x_2

- 1) Sans calculs, calculer $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$
- 2) Calculer $x_1^2 + x_2^2$ et $x_1^3 + x_2^3$
- 3) Montrer que pour tout entier naturel n $x_1^n + x_2^n$ est entier. Le calculer pour $n = 4$

Exercice 2

1) En s'inspirant de la factorisation de $a^n - b^n$ conjecturer une factorisation de $a^5 + b^5$. La vérifier ensuite par le calcul.

- 2) Soit $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Factoriser P .
- 3) Factoriser $x^4 + x^2 + 1$

Exercice 3

Soit $S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

- 1) Calculer S_1, S_2, S_3
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- 3) Montrer qu'il existe A, B et C tels que $\forall n \in \mathbb{N}^* S_n = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{2n+1}$

Exercice 4

Soit pour tout entier naturel n , f_n la fonction définie par : pour tout réel x , $f_n(x) = x^{1/n} - x$.

- 1) Etudier les variations de f_2 et dresser son tableau de variation
- 2) Pour $n \geq 2$ montrer que f_n admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$ que l'on calculera
- 3) Déterminez la limite de ce maximum lorsque n tend vers l'infini. Donner une interprétation graphique.

Exercice 5

Soit pour tout n entier naturel non nul : $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

- 1) Calculer H_1 , H_2 , H_4 et H_8
- 2) Montrer que H_n est croissante
- 3) a) Montrer que $\forall x \geq 0, \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$
b) En déduire que $\ln(1+n) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$

Exercice 6

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x^2-3x+1}{x^2-4} \geq 0$
 - 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 1$
 - 3) Résoudre l'équation $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0$
- Indication : on posera $y = x + \frac{1}{x}$*

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que : $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

- 1) Calculer u_1 , u_2 , u_3 , u_4
- 2) Conjecturer une expression simple de u_n pour $n \geq 1$
- 3) Démontrer cette conjecture.