



Test d'entrée TW3 – Mathématiques

Terminale – Programme renforcé

Tout document personnel est non autorisé. Calculatrice interdite

Consignes

Rédiger soigneusement et justifier toutes les étapes. Les calculs non justifiés ne seront pas acceptés.

1 Définitions

Donner une définition claire et précise des notions suivantes :

1. fonction dérivable en un point ;
2. l'intersection/l'union de deux ensembles ;
3. suite arithmétique/géométrique/arithmético-géométrique ;
4. forme algébrique, trigonométrique, polaire(ou exponentielle) d'un nombre complexe.

2 Exercices

Exercice 1. Étudier la fonction suivante de la manière la plus complète :

$$\begin{aligned} f : D_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(1 + e^x) \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $\alpha > 0$, et soit (u_n) définie par

$$u_{n+1} = u_n - \alpha u_n^2, \quad u_0 \in \mathbb{R}.$$

- a) On suppose $0 < u_0 \leq \frac{1}{\alpha}$. Déterminer le signe de (u_n) , sa monotonie et étudier sa convergence.
- b) Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{\alpha}{1 - \alpha u_n}.$$

En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = \frac{1}{\alpha}.$$

- c) Que se passe-t-il si $u_0 < 0$?

Exercice 3. Etudier la suite (u_n) définie pour tout $n > 0$ par :

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

Exercice 4. Soit $n > 0$, calculer les expressions suivantes :

- a) $G_n(r) = \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} r^{p+q}$
- b) $T_n = \sum_{1 \leq p \leq q \leq n} p$
- c) $A_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \min(i, j), \quad B_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \max(i, j), \quad D_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |i - j|$
- d) $U_n(r) = \sum_{1 \leq p \leq q \leq n} qr^p$
- e) Soit $x \in \mathbb{R}$, $C_n = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$

Exercice 5. On considère l'équation

$$(E) : x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = 0.$$

- a) Exprimer $x^2 + \frac{1}{x^2}$ en fonction de $x + \frac{1}{x}$.
- b) Soit x une solution de (E) . Montrer que

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0.$$

- c) Résoudre l'équation.
- d) De la même manière, résoudre l'équation

$$(E') : x^4 - 10x^3 + 23x^2 - 10x + 1 = 0.$$

Exercice 6 (Bonus).

Soit E un ensemble.

Définitions :

- Une *partition* de E est un ensemble $\mathcal{P}$ de sous-ensembles non vides de E tels que E soit la réunion de tous les éléments de $\mathcal{P}$ et que ces éléments soient deux à deux disjoints.
- Le *complémentaire* de F dans E , noté $C_E F$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F : $C_E F = \{x \in E \mid x \notin F\}$.

Soit $\mathcal{P}$ une partition de E , $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}$, et $\mathcal{B} = C_{\mathcal{P}} \mathcal{A}$

On pose

$$F = \{x \in E \mid \exists A \in \mathcal{A}, x \in A\}, \quad G = \{x \in E \mid \exists B \in \mathcal{B}, x \in B\}.$$

Exemple :

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On définit une partition $\mathcal{P}$ de E :

$$\mathcal{P} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}.$$

Choisissons $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{5, 6\}\} \subset \mathcal{P}$. Alors le complémentaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}$ est

$$\mathcal{B} = C_{\mathcal{P}}\mathcal{A} = \{\{3, 4\}\}.$$

On définit :

$$F = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{1, 2, 5, 6\}, \quad G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \{3, 4\} = C_E F.$$

- a) Montrer que $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) est une partition de F (resp. G).
- b) Établir que $G = C_E F$.