

Test d'entrée TW3 : Première

Mathématiques (Programme de première)

Candidature année de première

1 Définitions

Donner la définition des termes suivants :

1. Racine carrée
2. Entier pair et entier impair
3. Nombres rationnels
4. Fonction croissante sur un intervalle I
5. Fonction affine
6. Suite croissante
7. Équation du second degré
8. Trinôme

Si vous ne connaissez pas ces définitions, elles seront à connaître pour la suite.

2 Calcul algébrique

2.1 Cours : Démonstrations

Démontrer les formules suivantes :

1. Montrer que $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
2. Montrer que $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$
3. Montrer que $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
4. Montrer que $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Bonus : Proposer une factorisation de $a^7 - b^7$

Question 5 : Factoriser $x^3 - 1$ et $x^3 + 1$

3 Second degré

3.1 Cours : Carte d'identité de la fonction f

Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$.

Déterminer :

- Les coefficients a, b, c et le discriminant Δ
- La forme canonique
- La forme factorisée (si possible)
- Le tableau de signes
- Le tableau de variations

3.2 Exercices

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 + 4x - 1 = 0$
2. $x^4 - x^2 - 6 = 0$
3. $x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

Exercice 2 : On considère l'équation $(E) : x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = 0$

1. Montrer que $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$
2. Soit x une solution de (E) . Montrer alors que $x^2 + \frac{1}{x^2} - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$
3. En utilisant le changement de variable $y = x + \frac{1}{x}$, résoudre l'équation.
4. Résoudre de même l'équation : $x^4 - 10x^3 + 23x^2 - 21x + 1 = 0$

Exercice 3 : Soit f définie par $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$.

1. Donner le tableau de signes de f
2. Donner le tableau de variations de f
3. Soit $y \in \left[\frac{9}{2}; +\infty\right[$, résoudre l'équation $f(x) = y$ sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$. On appelle cette solution $f^{-1}(y)$.
4. Calculer $f(f^{-1}(y))$ pour tout $y \in \left[\frac{9}{2}; +\infty\right[$
5. Calculer $f^{-1}(f(x))$ pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

4 Suites

Exercice 1 : Donner les variations des suites suivantes :

1. (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{n-2}{n+2}$
2. (t_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_{n+1} = t_n^2 + t_n + 1$ et $t_0 = -1$
3. (s_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $s_{n+1} = s_n^2 - 3s_n + 4$ et $s_0 = 1$

Exercice 2 : Suites arithmético-géométriques On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$.

1. Calculer u_1 .
2. Résoudre l'équation $3x - 1 = x$.
3. On pose la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \frac{1}{2}$. Montrer que (v_n) est géométrique.
4. En déduire l'expression de (v_n) puis de (u_n) en fonction de n .

Exercice 3 : Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 3u_n + 5$ et $u_0 = 1$. Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 4 : On définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 3$.

1. Calculer u_1 .
2. Résoudre l'équation $\frac{3x - 1}{x + 1} = x$.
3. On pose (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$. Montrer que (v_n) est arithmétique.
4. En déduire une expression de (v_n) en fonction de n .
5. En déduire une expression de (u_n) en fonction de n .

Exercice 5 : Soit (u_n) définie par $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ pour $n \geq 0$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 5$.

1. Calculer u_2 .
2. Résoudre l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$. On note r_1 et r_2 les solutions ($r_1 \leq r_2$).
3. Soit (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - r_1 u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique et déterminer v_n en fonction de n .
4. Soit (w_n) définie par $w_n = u_{n+1} - r_2 u_n$. Montrer que (w_n) est géométrique et déterminer w_n en fonction de n .
5. En déduire u_n en fonction de n .

5 Études de fonctions

Exercice 1 : On définit la fonction f par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$.

1. Donner le tableau de variations de f .
2. Résoudre l'équation $f(x) - xf'(x) = 2$. On note r la solution non nulle.
3. Donner l'équation de la tangente en r .
4. Étudier la position relative entre $\mathcal{C}_f$ (la courbe de f) et la tangente en r .
5. Déterminer toutes les tangentes parallèles à la tangente en r .

Exercice 2 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3e^x + 1}{e^x + 1}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Donner les variations de f .
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 4$.
4. Montrer que $f(x) = 1 + \frac{2e^x}{e^x + 1}$.

Exercice 3 : On considère la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n(1-x)^n$ sur $[0; 1]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner le tableau de variations de f_n . En déduire $\sup_{x \in [0;1]} f_n(x)$.
2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \sup_{x \in [0;1]} f_n(x)$ est décroissante.
3. En déduire $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{x \in [0;1]} f_n(x)$.
4. Soit f_n définie par $f_n(x) = xe^{-n^2x}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Définir la suite (u_n) par $u_n = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} f_n(x)$ et calculer $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{x \in \mathbb{R}_+} f_n(x)$.

Corrigé - Test de Première

Définitions

1. $(\sqrt{a})^2 = a$ avec $a \geq 0$.
2. Pair : $n = 2k$, Impair : $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$).
3. Rationnel : $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$).
4. Croissante : $a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$.
5. Affine : $f(x) = ax + b$.
6. Suite croissante : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
7. Équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).
8. Trinôme : fonction polynomiale de degré 2 ($ax^2 + bx + c$).

Calcul algébrique

1. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.
2. Identique par développement distributif.
3. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
4. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.
5. **Bonus** : $a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$.
6. $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ et $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Second degré

Carte d'identité : $a = -2, b = -2, c = 4 \implies \Delta = (-2)^2 - 4(-2)(4) = 4 + 32 = 36$.

Forme canonique : $f(x) = -2 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \right]$.

Forme factorisée : $f(x) = -2(x - 1)(x + 2)$.

Variations : Croissante sur $] -\infty; -1/2]$ puis décroissante sur $[-1/2; +\infty[$. Maximum en $\frac{9}{2}$.

Signe : Positif sur $[-2; 1]$, négatif à l'extérieur.

Exercice 1 : 1) $x = -2 \pm \sqrt{5}$

2) Poser $y = x^2 \implies y^2 - y - 6 = 0 \implies y = 3$ ou $y = -2 \implies x = \pm\sqrt{3}$.

3) Poser $y = x^2 \implies y^2 - 5y + 1 = 0 \implies y = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \implies x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}}$. *(Correction de la coquille du texte original qui mentionnait 29 au lieu de 21)*

Exercice 2 : 1) $\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

2) En divisant l'équation par x^2 , on obtient l'égalité.

3) En posant $y = x + \frac{1}{x}$, l'équation devient $y^2 - 7y + 6 = 0 \implies y = 1$ ou $y = 6$.

Pour $y = 1 \implies x^2 - x + 1 = 0$ (pas de solution réelle).

Pour $y = 6 \implies x^2 - 6x + 1 = 0 \implies x = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Exercice 3 : $\Delta = 4 - 40 = -36 < 0 \implies f(x) > 0$ toujours.

$$f^{-1}(y) = \frac{-1 + \sqrt{2y-9}}{2}.$$

Suites

Exercice 1 : 1) $w_{n+1} - w_n = \frac{6}{(n+2)(n+3)} > 0 \implies$ croissante.

2) $t_{n+1} - t_n = t_n^2 + 1 > 0 \implies$ croissante.

3) $s_{n+1} - s_n = (s_n - 2)^2 \geq 0 \implies$ croissante.

Exercice 2 : 1) $u_1 = 2$ 2) $x = \frac{1}{2}$ 3) $v_{n+1} = 3v_n \implies$ géométrique de raison 3.

4) $v_n = \frac{1}{2} \times 3^n \implies u_n = \frac{1}{2} \times 3^n + \frac{1}{2}.$

Exercice 3 : $u_n = \frac{9}{2} \times 3^n - \frac{5}{2}.$

Exercice 4 : 1) $u_1 = 4$ 2) $x = 1$ 3) $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} \implies$ arithmétique de raison $1/2$.

4) $v_n = \frac{n+1}{2} \implies u_n = \frac{n+3}{n+1}.$

Exercice 5 : 1) $u_2 = 13$ 2) $x = -1$ ou $x = 3 \implies r_1 = -1, r_2 = 3.$

3) $v_n = 6 \times 3^n$ 4) $w_n = -2 \times (-1)^n.$

5) $u_n = \frac{1}{4}(6 \times 3^n + 2 \times (-1)^n).$

Fonctions

Exercice 1 : 1) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$, racines $x_1 = \frac{4 - \sqrt{13}}{3}$ et $x_2 = \frac{4 + \sqrt{13}}{3}.$

2) $x = 0$ ou $x = 2 \implies r = 2.$

3) Tangente en 2 : $y = -3x + 2.$

4) $h(x) = f(x) - (-3x + 2) = x(x-2)^2$. $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de la tangente sur $] -\infty; 0]$ et au-dessus sur $[0; +\infty[.$

5) Tangente en $x = 1/3$.

Exercice 2 : 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \implies$ croissante.

Exercice 3 : 1) $\sup f_n(x) = f_n(1/2) = \frac{1}{4^n}.$

2) $u_{n+1} - u_n < 0 \implies$ décroissante.

3) Le maximum est atteint pour $n = 1 \implies \frac{1}{4}.$

4) $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-1/2} \implies \sup u_n = u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}.$