

Cahier de calculs

Remise à niveau : rappel des propriétés

1 Puissances :

Rappels des propriétés :

- 1) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ Exemple : $(4 \times 5)^3 = 4^3 \times 5^3$
- 2) $a^n a^m = a^{n+m}$ Exemple : $6^4 \times 6^7 = 6^{4+7} = 6^{11}$
- 3) $(a^n)^m = a^{nm}$ Exemple : $(7^4)^5 = 7^{4 \times 5} = 7^{20}$
- 4) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
- 5) $a = a^1$ et $a^0 = 1$

Exercice 1 : Simplifier les expressions

- 1) $a^3 b^4 a^4 c^2 a^4 b$ 2) $a^3 b^4 a^5 b^2$

Exercice 2 : Développer

- 1) $(\frac{b}{2a})^2$ 2) $(ab^2 c^3)^4$

2 Fractions :

Rappels des propriétés :

- 1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ Pour additionner deux fractions il faut qu'elles aient le même dénominateur.

- 2) $\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$ Lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur par le même nombre la fraction reste égale. Exemple : $\frac{3}{6} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{1}{2}$

- 3) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$

- 4) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exercice 1 simplifier les fractions :

1) $\frac{48}{18}$ 2) $\frac{5}{15}$ 3) $\frac{34}{14}$ 4) $\frac{36}{27}$ 5) $\frac{45}{20}$ 6) $\frac{120}{12}$ 7) $\frac{57}{90}$

Exercice 2 additionner les fractions :

1) $\frac{4}{5} + \frac{7}{9}$ 2) $\frac{11}{2} + \frac{3}{7}$ 3) $\frac{4}{9} + \frac{6}{10}$
4) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 5) $1 + \frac{4}{5}$ 6) $x + \frac{y}{x}$

Exercice 3 :

1) Développer $(\frac{b}{2a})^2$ 2) Simplifier $\frac{3^4}{9^3}$

3 Distributivité simple et factorisation :

Distributivité simple

$a(b + c) = ab + ac$ Exemple : $x(x + 2) = x^2 + 2x$

$a(b + c)$ est appelée la forme factorisée et $ab + ac$ la forme développée.

Exemple : Si on souhaite factoriser $2p + 2a$ on met en évidence le facteur commun 2 : $2p + 2a = 2(p + a)$

Attention : Un signe " - " devant une parenthèse inverse tous les signes

Exemple : $-(x + 5) = -x - 5$

Exercice 1 Développer :

1) $4(x + y)$ 2) $2x(3 + x)$ 3) $5x(3x - 2)$ 4) $-(x + 2)$ 5) $-2x(x - 3)$

Exercice 2 Factoriser :

1) $2p + 2q$ 2) $x^2 + 4x$ 3) $4x + 16x^2$ 4) $2xn + n^3$ 5) $2a^2b + 6a$

4 Double distributivité

Rappel : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemple : $(2x + 3)(x + 4) = 2x \times x + 2x \times 4 + 3 \times x + 3 \times 4$
 $= 2x^2 + 8x + 3x + 12 = 2x^2 + 11x + 12$

Attention : $(2x)^2 = 2^2x^2 = 4x^2$ ce n'est pas $2x^2$ ici le carré ne porte que sur le x et pas le 2.

Remarque : dans une expression de type $(a - b)(c + d)$ le signe " - " est sur le b et non pas sur le a

Exercice Développer :

- 1) $(3x + 2)(2x + 3)$ 2) $(x + 2)(x + 3)$ 3) $(3x + 1)(4x + 4)$ 4) $(5x + 3)(3x + 4)$
 5) $(4x - 1)(x + 3)$ 6) $(x - 3)(x + 5)$ 7) $(x - 3)(x - 5)$ 8) $(x - 5)(x - 7)$
 9) $(x - 4)(x + 3)$ 10) $(2x + 4)(3x - 5)$ 11) $(2x + 7)(x - 3)$ 12) $(6x - 1)(7x + 3)$
 13) $(2x - 1)(2x + 1)$ 14) $(3x + 2)(3x - 2)$ 15) $(a + b)^2$ 16) $(a - b)^2$

5 Identités remarquables :

1ère identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Démonstration : $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2ème identité remarquable : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Démonstration : $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3ème identité remarquable : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Démonstration : $(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$

Remarque : $ab = ba$ quand on multiplie 2 nombres réels, l'ordre n'a pas d'importance. ($4 \times 3 = 3 \times 4$)

Application directe : $(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

Remarques :

1) Ici $a = 2x$ et $b = 3$ donc attention à ne pas écrire $2x^2$ au lieu de $(2x)^2$ dans le calcul. (Si on est à l'aise on écrit directement $4x^2$).

2) Ne pas oublier le 2 du $2ab$ dans la formule.

On se sert des identités remarquables pour développer plus rapidement une expression, sans utiliser la double distributivité, ou bien aussi pour factoriser.

Exemple de factorisation : $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = (x + 1)^2$

Exercice 1 Développer :

- 1) $(x + 2)^2$ 2) $(2x - 3)^2$ 3) $(5x - 3)^2$ 4) $(3x + 2)^2$ 5) $(4x - 1)^2$
 6) $(4x - 1)(4x + 1)$ 7) $(2x + 3)(2x - 3)$ 8) $(x - 3)(x + 3)$ 9) $(3x - 6)(3x + 6)$

Exercice 2 Factoriser :

1) $4x^2 + 20x + 25$ 2) $x^2 - 6x + 9$ 3) $t^2 + 8t + 16$ 4) $9x^2 - 24x + 16$

5) $x^2 - 1$ 6) $x^2 - 9$ 7) $4x^2 - 1$ 8) $9x^2 - 16$ 9) $x^2 - 25$

6 Racine carrée

Définition : Soit a un réel **positif** on appelle racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$ le réel **positif** tel que $\sqrt{a}^2 = a$

Propriétés algébriques :

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ Exemple : $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$

2) $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = a$ pour $a \geq 0$ Exemple : $\sqrt{3^2} = \sqrt{3^2} = 3$

3) Si $a \leq 0$ $\sqrt{a^2} = -a$ Exemple $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{6^2} = 6$ ($a = -6$)

Remarque : La racine carrée d'un nombre est toujours un nombre positif.

Exercice 1 Simplifier :

1) $\sqrt{12}$ 2) $\sqrt{44}$ 3) $\sqrt{18}$ 4) $\sqrt{98}$ 5) $\sqrt{108}$ 6) $\sqrt{27}$ 7) $\sqrt{75}$

Remarque : Lorsque vous êtes devant une telle racine dans un calcul, simplifiez la toujours, ayez ce réflexe.

Exercice 2 Factoriser :

1) $x^2 - 5$ 2) $t^2 - 7$ 3) $x^4 - 4$ 4) $x^2 - 15$ 5) $x^2 - \sqrt{8}x + 2$

Exercice 3 Développer :

1) $(\sqrt{3} + 1)^2$ 2) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$ 3) $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$ 4) $(\sqrt{5} + 4)^2$

Exercice 4 Simplifier :

1) $\frac{4 - \sqrt{8}}{4}$ 2) $\frac{3 - \sqrt{18}}{6}$ 3) $\frac{4 + \sqrt{20}}{10}$ 4) $\frac{3 + \sqrt{90}}{3}$ 5) $\frac{10 - \sqrt{200}}{20}$
6) $\frac{12 - \sqrt{24}}{12}$ 7) $\frac{2 - \sqrt{32}}{8}$ 8) $\frac{\sqrt{28} - \sqrt{20}}{4}$ 9) $\frac{\sqrt{45} + \sqrt{27}}{3 + \sqrt{18}}$

7 Equations

Définition : On appelle équation du premier degré, toute équation d'inconnue x de la forme $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$, a et b deux réels non nuls.

Exemple : $3x + 4 = 0$.

Résolution :

$ax + b = 0$ donc en faisant $-b$ dans les deux membres de l'égalité :

$$ax + b - b = 0 - b$$

$ax = -b$. Comme $a \neq 0$ on divise par a dans les deux membres de l'égalité :

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} \text{ et donc } x = \frac{-b}{a}$$

Exemple : $4x + 5 = 0$

$$4x = -5 \text{ donc } x = \frac{-5}{4}$$

Exercice Résoudre les équations :

$$1) x + 4 = 0 \quad 2) 3x - 4 = 0 \quad 3) 5x - 1 = 0 \quad 4) 2x + 5 = 0$$

Résolution d'une équation de la forme $ax + b = cx + d$

Exemple détaillé : prenons l'équation $5x + 4 = 2x - 5$.

L'idée sera de mettre les " x " d'un côté et les nombres de l'autre. Pour qu'il n'y ait plus de " x " à droite, il faut faire $-2x$:

$$5x + 4 - 2x = 2x - 5 - 2x$$

$3x + 4 = -5$. Pour qu'il n'y ait plus de "nombres" à gauche on fait -4 :

$$3x + 4 - 4 = -5 - 4 \quad \text{donc : } 3x = -9$$

Comme on cherche la valeur de x on divise par 3 : $x = -\frac{9}{3} = -3$

Remarque : Le but est d'avoir à la fin $x = \dots$ donc soyez intelligent, si vous en êtes à $\frac{x}{2} = 4$ par exemple, il suffit de multiplier par 2, ne divisez pas par $\frac{1}{2}$, idem si vous avez $-x = 4$ par exemple, n'écrivez pas $x = \frac{4}{-1}$, mais $x = -4$ car multiplier par -1 suffira.

Exercice Résoudre les équations suivantes :

$$1) 4x + 3 = 5x - 3 \quad 2) 4x + 5 = 4 \quad 3) 4x - 1 = 3x \quad 4) 3x - 7 = x + 3$$

$$5) 5x - 3 = 8x + 3 \quad 6) \frac{x}{3} + 3 = \frac{x}{2} - 4 \quad 7) 4x + 2 = 2x - 9$$

8 Corrigés des exercices sur les puissances

Exercice 1 :

1) $a^{11}b^5c^2$ 2) a^8b^6

Exercice 2 :

1) $\frac{b^2}{(2a)^2} = \frac{b^2}{4a^2}$ 2) $a^4(b^2)^4(c^3)^4 = a^4b^8c^{12}$

9 Corrigés des exercices sur les fractions :

Exercice 1 :

1) $\frac{6 \times 8}{6 \times 3} = \frac{8}{3}$ 2) $\frac{5}{15} = \frac{5}{3 \times 5} = \frac{1}{3}$ 3) $\frac{2 \times 17}{2 \times 7} = \frac{17}{7}$ 4) $\frac{36}{27} = \frac{9 \times 4}{9 \times 3} = \frac{4}{3}$
5) $\frac{45}{20} = \frac{5 \times 9}{5 \times 4} = \frac{9}{4}$ 6) $\frac{120}{12} = \frac{12 \times 10}{12} = 10$ 7) $\frac{57}{90} = \frac{3 \times 19}{3 \times 30} = \frac{19}{30}$

Exercice 2

1) $\frac{4}{5} + \frac{7}{9} = \frac{4 \times 9}{5 \times 9} + \frac{7 \times 5}{9 \times 5} = \frac{36}{45} + \frac{35}{45} = \frac{71}{45}$
2) $\frac{11}{2} + \frac{3}{7} = \frac{11 \times 7}{2 \times 7} + \frac{3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{77}{14} + \frac{6}{14} = \frac{83}{14}$
3) $\frac{4}{9} + \frac{6}{10} = \frac{4 \times 10}{9 \times 10} + \frac{6 \times 9}{10 \times 9} = \frac{40}{90} + \frac{54}{90} = \frac{94}{90} = \frac{47}{45}$
4) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$
5) $1 + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$
6) $x + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y}{x}$

Exercice 3

1) $\frac{b^2}{4a^2}$ 2) $\frac{3^4}{9^3} = \frac{3^4}{(3^2)^3} = \frac{3^4}{3^6} = \frac{1}{3^2}$,

10 Corrigés des exercices : distributivité simple et factorisation

Exercice 1 :

$$1) 4x + 4y \quad 2) 6x + 2x^2 \quad 3) 15x^2 - 10x \quad 4) -x - 2 \quad 5) -2x^2 + 6x$$

Exercice 2 :

$$1) 2(p + q) \quad 2) x(x + 4) \quad 3) 4x(1 + 4x) \quad 4) n(2x + n) \quad 5) 2a(ab + 3)$$

11 Corrigés des exercices : double distributivité

Exercice :

$$1) (3x + 2)(2x + 3) = 3x \cdot 2x + 9x + 4x + 6 = 6x^2 + 13x + 6$$

$$2) (x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

$$3) (3x + 1)(4x + 4) = 3x \cdot 4x + 12x + 4x + 4 = 12x^2 + 16x + 4$$

$$4) (5x + 3)(3x + 4) = 15x^2 + 20x + 9x + 12 = 15x^2 + 29x + 12$$

$$5) (4x - 1)(x + 3) = 4x^2 + 12x - x - 3 = 4x^2 + 11x - 3$$

$$6) (x - 3)(x + 5) = x^2 + 5x - 3x - 15 = x^2 + 2x - 15$$

$$7) (x - 3)(x - 5) = x^2 - 5x - 3x + 15 = x^2 - 8x + 15$$

$$8) (x - 5)(x - 7) = x^2 - 7x - 5x + 35 = x^2 - 12x + 35$$

$$9) (x - 4)(x + 3) = x^2 + 3x - 4x - 12 = x^2 - x - 12$$

$$10) (2x + 4)(3x - 5) = 6x^2 - 10x + 12x - 20 = 6x^2 + 2x - 20$$

$$11) (2x + 7)(x - 3) = 2x^2 - 6x + 7x - 21 = 2x^2 + x - 21$$

$$12) (6x - 1)(7x + 3) = 42x^2 + 18x - 7x - 3 = 42x^2 + 11x - 3$$

$$13) (2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 + 2x - 2x - 1 = 4x^2 - 1$$

$$14) (3x + 2)(3x - 2) = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$$

$$15) (a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$16) (a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

12 Corrigés des exercices sur les identités remarquables :

Exercice 1 :

1) $x^2 + 4x + 4$

2) $4x^2 - 12x + 9$

3) $25x^2 - 30X + 9$

4) $9x^2 + 12x + 4$

5) $16x^2 - 8x + 1$

6) $16x^2 - 1$

7) $4x^2 - 9$

8) $x^2 - 9$

9) $9x^2 - 36$

Exercice 2 :

1) $(2x)^2 + 2 \times 5 + 5^2 = (2x + 5)^2$

2) $(x - 3)^2$

3) $(t + 4)^2$

4) $(3x - 4)^2$

5) $(x - 1)(x + 1)$

6) $(x - 3)(x + 3)$ 7) $(2x + 1)(2x - 1)$

8) $(3x - 4)(3x + 4)$

9) $(x - 5)(x + 5)$

13 Corrigés des exercices sur la racine carrée

Exercice 1 :

- 1) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
- 2) $\sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = \sqrt{4}\sqrt{11} = 2\sqrt{11}$
- 3) $\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- 4) $\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49}\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
- 5) $\sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = \sqrt{36}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
- 6) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
- 7) $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

Exercice 2 :

- 1) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$
- 2) $(t - \sqrt{7})(t + \sqrt{7})$
- 3) $(x^2 - 2)(x^2 + 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$
- 4) $(x - \sqrt{15})(x + \sqrt{15})$
- 5) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$ donc :

$$x^2 - \sqrt{8}x + 2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}^2 = (x - \sqrt{2})^2$$

Exercice 3 :

- 1) $4 + 2\sqrt{3}$ (3 + 1 = 4) 2) 1 3) 3 4) $21 + 8\sqrt{5}$

Exercice 4 :

- 1) $\frac{4 - \sqrt{8}}{4} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$
- 2) $\frac{3 - \sqrt{18}}{6} = \frac{3(1 - \sqrt{2})}{3 \times 2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$
- 3) $\frac{4 + \sqrt{20}}{10} = \frac{2(2 + \sqrt{5})}{2 \times 5} = \frac{2 + \sqrt{5}}{5}$
- 4) $\frac{3(1 + \sqrt{10})}{3} = 1 + \sqrt{10}$
- 5) $\frac{10 - \sqrt{200}}{20} = \frac{10(1 - \sqrt{2})}{2 \times 10} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}
6) \quad & \frac{12 - \sqrt{24}}{12} = \frac{2(6 - \sqrt{6})}{2 \times 6} = \frac{6 - \sqrt{6}}{6} \\
7) \quad & \frac{2(1 - 2\sqrt{2})}{8} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{4} \\
8) \quad & \frac{\sqrt{28} - \sqrt{20}}{4} = \frac{2(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{4} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} \\
9) \quad & \frac{\sqrt{45} + \sqrt{27}}{3 + \sqrt{18}} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{3(1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}
\end{aligned}$$

14 Corrigés des exercices sur les équations

Exercice 1 :

1) $x + 4 = 0$ donc $x + 4 - 4 = 0 - 4$ donc $x = -4$ (ce type d'équation doit être très directe !)

2) $3x - 4 = 0$

$3x = 4$ donc $x = \frac{4}{3}$

3) $5x - 1 = 0$ donc $x = \frac{1}{5}$

4) $2x + 5 = 0$ donc $x = \frac{-5}{2}$

Exercice 2 :

1) $4x + 3 = 5x - 3$

$4x = 5x - 6$ donc $-x = -6$, en multipliant par -1 on a : $x = 6$. vous pouvez vérifier : $4 \times 6 + 3 = 27$ et $5 \times 6 - 3 = 27$ on a bien égalité. (ayez l'habitude de vérifier.)

2) $4x + 5 = 4$ donc $4x = -1$ donc $x = \frac{-1}{4}$

3) $4x - 1 = 3x$ donc $x - 1 = 0$ donc $x = 1$

4) $3x - 7 = x + 3$ donc $2x = 4$ donc $x = 2$

5) $5x - 3 = 8x + 3$

$-3x = +6$ donc $x = \frac{-6}{3} = -2$ quad 6) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = -7$

$\frac{x}{6} = -7$ donc $x = -7 \times 6 = -42$ 7) $4x + 2 = 2x - 9$

$2x = -11$ donc $x = \frac{-11}{2}$