

Test d'entrée TW3 : Seconde

Mathématiques (Programme de seconde)

Candidature année de seconde

1 Définitions

Donner la définition des termes suivants :

1. Racine carrée
2. Entier pair et entier impair
3. Nombres rationnels
4. Fonction croissante sur un intervalle I
5. Fonction décroissante sur un intervalle I
6. Fonction affine

Si vous ne connaissez pas ces définitions, elles seront à connaître absolument pour la suite.

2 Calcul algébrique

2.1 Cours : Démonstrations

Démontrer les formules suivantes :

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Ces formules seront dorénavant à connaître.

2.2 Développement et factorisation

1. Développer :

(a) $(x - 3)(x - 5)$

(b) $(x - 2)(x - 7)$

(c) $(x - 4)(x + 5)$

2. Développer :

(a) $(2x + 1)^2$

(b) $(3x^2 + 2)^2$

(c) $(4x - 1)^2$

3. Factoriser :

(a) $4x + 4y$

(b) $6x^2 + 4x$

(c) $7x^3 - 2x$

4. Factoriser :

(a) $x^2 - 4$

(b) $4x^2 - 1$

(c) $x^2 - 7$

(d) $5x^2 - 1$

(e) $x^4 - 9$

2.3 Fractions

1. Simplifier :

(a) $\frac{40}{15}$

(b) $\frac{39}{15}$

(c) $\frac{7a^2}{5ab}$

2. Simplifier :

(a) $\frac{3xy + x}{9y^2 + 3y}$

(b) $\frac{ax - ay}{x - y}$

(c) $\frac{x^2 - 1}{3x + 3}$

2.4 Racine carrée

1. Simplifier :

(a) $\sqrt{50}$

(b) $\sqrt{8}$

(c) $\sqrt{98}$

Exercice :

1. Développer $(\sqrt{11} - 7)(\sqrt{11} + 7)$

2. En déduire le signe de $\sqrt{11} - 7$

3. En adaptant les questions précédentes, déterminer le signe de : $5\sqrt{2} - 7$

2.5 Équations

1. Résoudre les équations suivantes :

(a) $6x + 1 = 2x - 4$

(b) $4x - 1 = x + 2$

(c) $x + 2 = 0$

2. Résoudre les équations suivantes :

(a) $x^2 - 4 = 0$

(b) $x^2 - 5 = 0$

(c) $2x^2 - 3 = 0$

Exercice : Résolution de $4x^2 + 12x - 16 = 0$

1. Développer $(2x + 3)^2 - 25$

2. En déduire une factorisation de $4x^2 + 12x - 16$

3. Résoudre l'équation : $4x^2 + 12x - 16 = 0$

3 Fonctions

Exercice 1 : Donner l'ensemble de définition et le tableau de signes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{5x^2 + 2}$

2. $g(x) = \frac{6x - 7}{7x - 5}$

3. $h(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 4}$

4. $j(x) = \sqrt{\frac{6x - 5}{x^2 - 5}}$

Exercice 2 : Étude de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 5x - 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Développer $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}$

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$

3. Déterminer le signe de f

4. Déterminer les variations de f sur $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$

5. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 3}$

6. Étudier la position relative entre la courbe de f et la fonction g définie par $g(x) = -5x + 8$

Exercice 3 : Étude de la fonction f définie par $f(x) = \frac{9x - 5}{3x - 1}$.

1. Donner l'ensemble de définition D_f de f
2. Donner le tableau de signes de f
3. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = 3 - \frac{2}{3x - 1}$
4. En déduire les variations de f sur $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$
5. Résoudre l'équation $f(x) = 2$

Corrigé - Test de Seconde

Mise en garde : Il s'agit d'un corrigé succinct, vous devez rédiger entièrement sur votre copie.

Définitions

1. Soit a un réel positif, on appelle racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$ le réel positif tel que $(\sqrt{a})^2 = a$.
2. Soit n un entier, n est pair s'il existe un entier k tel que $n = 2k$. Il est impair s'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.
3. On appelle nombre rationnel tout nombre de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers ($q \neq 0$).
4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I , f est dite croissante si pour tous a et $b \in I$ tels que $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
5. Soit f une fonction définie sur un intervalle I , f est dite décroissante si pour tous a et $b \in I$ tels que $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$.
6. Une fonction affine f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec a et $b \in \mathbb{R}$. Le nombre a est appelé coefficient directeur.

Calcul algébrique

Démonstrations

1. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$
4. $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

Développement et factorisation

Développer :

1. $(x - 3)(x - 5) = x^2 - 8x + 15$
2. $(x - 2)(x - 7) = x^2 - 9x + 14$
3. $(x - 4)(x + 5) = x^2 + x - 20$

Développer :

1. $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$
2. $(3x^2 + 2)^2 = 9x^4 + 12x^2 + 4$
3. $(4x - 1)^2 = 16x^2 - 8x + 1$

Factoriser :

1. $4x + 4y = 4(x + y)$
2. $6x^2 + 4x = 2x(3x + 2)$
3. $7x^3 - 2x = x(7x^2 - 2)$

Factoriser :

1. $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$
2. $4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$
3. $x^2 - 7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$
4. $5x^2 - 1 = (\sqrt{5}x - 1)(\sqrt{5}x + 1)$
5. $x^4 - 9 = (x^2 - 3)(x^2 + 3) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$

Fractions

Simplifier : 1) $\frac{8}{3}$ 2) $\frac{13}{5}$ 3) $\frac{7a}{5b}$

Simplifier : 1) $\frac{x(3y+1)}{3y(3y+1)} = \frac{x}{3y}$ 2) $\frac{a(x-y)}{x-y} = a$ 3) $\frac{(x-1)(x+1)}{3(x+1)} = \frac{x-1}{3}$

Racines carrées

- 1) $5\sqrt{2}$ 2) $2\sqrt{2}$ 3) $7\sqrt{2}$

Exercice :

1. $(\sqrt{11} - 7)(\sqrt{11} + 7) = 11 - 49 = -38$
2. $\sqrt{11} - 7 = \frac{(\sqrt{11} - 7)(\sqrt{11} + 7)}{\sqrt{11} + 7} = \frac{-38}{\sqrt{11} + 7} < 0$
3. $5\sqrt{2} - 7 = \frac{(5\sqrt{2} - 7)(5\sqrt{2} + 7)}{5\sqrt{2} + 7} = \frac{50 - 49}{5\sqrt{2} + 7} = \frac{1}{5\sqrt{2} + 7} > 0$

Équations

1. (a) $4x = -5 \implies x = -\frac{5}{4}$
 (b) $3x = 3 \implies x = 1$
 (c) $x = -2$
2. (a) $x = 2$ ou $x = -2$
 (b) $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$
 (c) $x^2 = \frac{3}{2} \implies x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Exercice (Résolution de $4x^2 + 12x - 16 = 0$) :

1. $(2x + 3)^2 - 25 = 4x^2 + 12x + 9 - 25 = 4x^2 + 12x - 16$
2. $4x^2 + 12x - 16 = (2x + 3)^2 - 5^2 = (2x + 3 - 5)(2x + 3 + 5) = (2x - 2)(2x + 8)$
3. $(2x - 2)(2x + 8) = 0 \implies x = 1$ ou $x = -4$.

Fonctions

Exercice 1 :

1. $5x^2 + 2 > 0$ pour tout x , donc $D_f = \mathbb{R}$. La fonction est positive car c'est une racine carrée.
2. $7x - 5 \neq 0 \implies x \neq \frac{5}{7}$. Donc $D_g =]-\infty; \frac{5}{7}[\cup]\frac{5}{7}; +\infty[$.
Signe : $6x - 7 = 0 \implies x = \frac{6}{7}$. Le tableau de signes montre que $g(x) > 0$ sur $]-\infty; \frac{5}{7}[\cup]\frac{6}{7}; +\infty[$ et négatif entre les deux.
3. $x^2 - 4 \neq 0 \implies x \neq \pm 2$. Donc $D_h =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$. Le numérateur $x^2 + 5 > 0$. Le dénominateur est positif à l'extérieur des racines ± 2 . Donc $h(x) > 0$ sur $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.
4. On étudie le signe de $\frac{6x - 5}{x^2 - 5}$. Les valeurs critiques sont $\frac{5}{6}$, $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$. On obtient $D_j =]-\sqrt{5}; \frac{5}{6}] \cup]\sqrt{5}; +\infty[$.

Exercice 2 :

1. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{37}{4} = x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{37}{4} = x^2 - 5x - 3$.
2. $f(x) = 0 \implies \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{37}{4} \implies x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$ ou $x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}$.
3. $f(x) \geq 0$ à l'extérieur des racines : $]-\infty; \frac{5 - \sqrt{37}}{2}] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{37}}{2}; +\infty\right[$.
4. Décroissante sur $]-\infty; \frac{5}{2}]$ et croissante sur $[\frac{5}{2}; +\infty[$.
5. $D_h =]-\infty; \frac{5 - \sqrt{37}}{2}] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{37}}{2}; +\infty\right[$.
6. $f(x) - g(x) = x^2 - 5x - 3 - (-5x + 8) = x^2 - 11$. C_f est au-dessus de C_g lorsque $x^2 - 11 > 0$, c'est-à-dire sur $]-\infty; -\sqrt{11}[\cup]\sqrt{11}; +\infty[$.

Exercice 3 :

1. $3x - 1 \neq 0 \implies D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.
2. Racines : $9x - 5 = 0 \implies x = \frac{5}{9}$. Le signe est positif sur $]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]\frac{5}{9}; +\infty[$.
3. $3 - \frac{2}{3x - 1} = \frac{3(3x - 1) - 2}{3x - 1} = \frac{9x - 5}{3x - 1} = f(x)$.
4. Croissante sur chacun des intervalles de son domaine.
5. $f(x) = 2 \implies 9x - 5 = 2(3x - 1) \implies 3x = 3 \implies x = 1$.