

Guide de calculs

2nde-1ère-Terminale

Calculs de base :

Prérequis :

Distributivité, (simple et double)

Identités remarquables

Racines carrées

Fractions

Résolution d'équation ($ax + b = 0$ et produit nul et pas de Δ)

Développer :

1) $(x - 3)(x - 5)$ 2) $(x + 3)(x - 1)$ 3) $(5x - 2)(x + 3)$ 4) $(x - 8)(x + 2)$

5) $(5x + 1)^2$ 6) $(3x - 1)^2$ 7) $(7x^2 + 1)^2$ 8) $(x^2 - 2)^2$ 9) $(2x + y)^2$

10) $(2\sqrt{3} - 1)^2$ 11) $(2\sqrt{7} - 3)(2\sqrt{7} + 3)$ 12) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$ 13) $(\sqrt{3} + 2)^2$

Factoriser au maximum :

1) $7p + 7q$ 2) $-x - y$ 3) $x^2 - 3x$ 4) $ax - ay$ 5) $7x^3 - 49x^2$ 6) $4x^3 - 4x^2$

7) $x^2 - 8$ 8) $x^2 - 5$ 9) $x^2 - 1$ 10) $x^4 - 1$ 11) $x^4 - 9$ 12) $2x^2 - 32$

13) $(x + 2)^2 - 7$ 14) $(2x - 3)^2 - 5$ 15) $(x^2 + 1)^2 - 4$ 16) $(x^2 - 4)^2 - 9$

17) $x^2 - 6x + 9$ 18) $x^2 - 4x + 4$ 19) $2x^2 - 28x + 98$ 20) $4x^4 + 4x^2 + 1$

Résoudre les équations :

1) $x + 1 = 0$ 2) $3x - 2 = 0$ 3) $7x + 2 = 0$ 4) $4 - x = 0$ 5) $2x + 3 = 0$

6) $x^2 - 5 = 0$ 7) $7x^2 - 2 = 0$ 8) $6x^2 - 1 = 0$ 9) $3x^2 + 1 = 0$

10) $(x + 6)^2 - 2 = 0$ 11) $(7x + 2)^2 - 3$ 12) $(x^2 - 3)^2 - 4 = 0$

13) $7x + 3 = 2x + 5$ 14) $8x - 1 = 10x + 2$ 15) $3x + 6 = x - 3$

Résolution d'équation en deux temps :

Exercice 1 :

- 1) Développer $(x - 3)^2 - 5$
- 2) Résoudre l'équation $x^2 - 6x + 4 = 0$

Exercice 2 :

- 1) Développer $(4x - 5)^2 - 2$
- 2) Résoudre l'équation $16x^2 - 40x + 23 = 0$

Exercice 3 :

- 1) Développer $(2x + 1)^2 - 7$
- 2) Résoudre l'équation $4x^2 + 4x - 6 = 0$

Exercice 4 :

- 1) Développer $(x^2 - 1)^2 - 4$
- 2) Résoudre l'équation $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

Simplifier (niveau 1) :

- 1) $\sqrt{18}$ 2) $\sqrt{44}$ 3) $\sqrt{98}$ 4) $\sqrt{50}$ 5) $\sqrt{48}$ 6) $\sqrt{45}$ 7) $\sqrt{75}$
- 8) $\frac{12}{10}$ 9) $\frac{121}{22}$ 10) $\frac{75}{55}$ 11) $\frac{27}{24}$ 12) $\frac{42}{35}$ 13) $\frac{7ab^2}{49a^2}$

Simplifier (niveau 2) :

- 1) $\frac{x^2 - 1}{2x + 2}$ 2) $\frac{ax - ay}{x - y}$ 3) $\frac{7x^2 - 14x}{2x - 4}$ 4) $\frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ 5) $\frac{4x^2 - 1}{6x - 3}$
- 5) $\frac{4 + \sqrt{12}}{4}$ 6) $\frac{10 - \sqrt{50}}{10}$ 7) $\frac{6 + \sqrt{12}}{12}$ 8) $\frac{9 - \sqrt{18}}{6}$ 9) $\frac{8 + \sqrt{20}}{4}$

Factorisation challenge :

Factoriser $X^4 + 1$

(Indication : faire apparaître le terme manquant d'une identité remarquable)

Signe et comparaison de nombres :

Règle des signes :

Surtout ne plus jamais dire "moins et moins ça fait plus". Vous connaissez deux opérations "+" et "x" (ou "." même sans signe).

Les règles des signes sont :

1) $+\times+=+$ (positif fois positif = positif)

2) $+\times-= -$ (positif fois négatif = négatif)

3) $- \times - = +$ (négatif fois négatif = positif)

4) positif + positif = positif

5) négatif + négatif = négatif

6) positif + négatif = on ne peut rien dire.

Conséquence : un carré est toujours positif car si x est positif alors x^2 est positif car $+\times+=+$ et si x est négatif alors x^2 est positif car $- \times - = +$

Cadre et propriétés des inégalités :

Comparer deux nombres réels a et b signifie dire qui de a ou de b est le plus grand. Bien évidemment sans calculatrice. On cherche à savoir si $a \leq b$ ou $b \leq a$. Que veut dire " $a \leq b$ " ? b est supérieur à a , mais surtout : $b - a \geq 0$ c'est-à-dire $b - a$ est positif.

Comparer les fractions :

1) $\frac{11}{10}$ et $\frac{9}{8}$ 2) $\frac{7}{8}$ et $\frac{5}{6}$ 3) $\frac{13}{5}$ et $\frac{14}{6}$ 4) $\frac{17}{8}$ et $\frac{19}{9}$

Comparaison et méthode du conjugué :

Un exemple : Si l'on vous demande de montrer que $1 \leq \sqrt{2}$ vous taperez à la calculatrice qui affichera "1,41.." et vous conclurez... Sauf que nous sommes en maths et on ne délègue pas le raisonnement à la machine. Ou alors soyez prêt à répondre à la question : Comment la calculatrice a-t-elle trouvé 1,41.. ?

On cherche à montrer que $1 \leq \sqrt{2}$ autrement dit que $\sqrt{2} - 1$ est positif.

On définit (mal à votre niveau) le conjugué par $\sqrt{2} + 1$ et on écrit :

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \geq 0 \text{ (quotient de deux nombres } \geq 0.)$$

Exercice :

Montrer que : 1) $3 \leq \sqrt{13}$ 2) $7 \leq \sqrt{50}$ 3) $5\sqrt{2} \leq 8$

Remarque : On peut aussi comparer les carrés pour supprimer la racine, mais alors vous utilisez un argument : la croissance de la racine carrée. Savez vous montrer que la fonction racine est croissante ?

Calculs approfondis :

Factorisation éclairée :

But : Factoriser des expressions types " $x^2 - sx + p$ "

Explication de la méthode :

On développe $(x - p)(x - q) = x^2 - qx - px + pq = x^2 - (p + q)x + pq$

Ce que l'on remarque : le terme devant x comporte la somme des nombres p et q avec un signe moins, le terme constant (sans x ni x^2) est le produit des deux nombres. Ainsi si on remarque qui sont les termes en question alors on peut factoriser très rapidement.

Exemple : Factorisation de $x^2 - 5x + 6$: $6 = 6 \times 1$ or $6 + 1 \neq 5$ mais $6 = 2 \times 3$ et $5 = 2 + 3$ donc $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Remarque 1 : On a la même factorisation avec uniquement des signes positifs $(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$

Remarque 2 : L'expression est symétrique donc cela n'a aucun sens d'écrire " $x^2 - (p + q)x + pq = (x - p)(x + q)$ " en développant on voit rapidement que la factorisation est fautive.

Application de la factorisation éclairée :

Exercice 1 : Factoriser en un coup d'oeil

1) $x^2 - 8x + 12$ 2) $x^2 - 8x + 7$ 3) $x^2 - 8x + 15$ 4) $x^2 - 12x + 35$

5) $x^2 - 11x + 30$ 6) $x^2 - 9x + 8$ 7) $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ 8) $x^2 - 3\sqrt{a}x + 2a$

Exercice 2 : Donner les solutions des équations sans poser aucun calcul

1) $x^2 - 9x + 20 = 0$ 2) $x^2 - 10x + 21 = 0$ 3) $x^2 - 13x + 42 = 0$

4) $x^2 - (n + 1)x + n = 0$ 5) $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$

Image d'un point, composition :

Image d'un point par une fonction

Exercice 1 : Donner l'image de a par f dans chacun des cas :

1) $f(x) = x^2 - 7x + 6$ et $a = 3$ 2) $f(x) = x^2 + 1$ et $a = -1$

3) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ et $a = -3$ 4) $f(x) = \sqrt{3x - 7}$ et $a = 5$

Exercice 2 : Dans chaque cas donner l'image de : 1 ; $2x$; $a + 1$ et $a + h$

1) $f(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$; 2) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; 3) $k(x) = x^3 - x + 1$ 4) $h(x) = 4$

Point appartenant à une courbe :

Définition : Soient f une fonction définie sur son ensemble de définition qu'on note D_f et $(x; y)$ un point dans le repère habituel. On dit que $(x; y)$ appartient à la courbe représentative de f si $y = f(x)$. On note la courbe C_f .

Exemple : f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$, le point $(4; 13) \in C_f$ car $f(4) = 4^2 - 3 = 16 - 3 = 13$

Exercices 1 : Dire si les points appartiennent ou non aux courbes

- 1) $(4; 0)$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 16$
2) $(1; 1)$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$
3) $(2; -1)$ et f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

Exercice 2 : Pour quelle valeur de a le point $(a; a)$ appartient C_f avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$

Calcul de $f \circ g$

Définition : On définit (lorsque cela est possible) $f \circ f$ par la fonction : $f \circ g(x) = f(g(x))$

Exemple : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$ alors $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$

Remarque : On voit bien que $f \circ g(x) \neq g \circ f(x) = g(x^2) = x^2 + 1$

Exercice 1 : Donner $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$

1) $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ 2) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ et $g(x) = \cos(x)$

Exercice 2 : Calculer $f \circ f(x)$ pour $f(x) = \frac{3x + 2}{4x - 3}$

Exercice 3 : Calculer $f \circ f(x)$ pour $f(x) = \frac{5x + 3}{4x - 5}$

Factorisation avancée :

Complément sur les identités remarquables :

Ces exercices sont très faciles, leur intérêt n'est pas de les faire mais plutôt que vous vous appropriiez ces formules qui seront utiles dans la prochaine section.

- 1) Montrer que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- 2) Montrer que $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
- 3) Montrer que $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$
- 4) Montrer que $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$
- 5) Montrer que $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- 6) Montrer que $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- 7) Proposer une factorisation de $a^7 - b^7$
- 8) Factoriser $x^3 - 1$ et $x^3 + 1$ (n'oubliez pas que $-1 = (-1)^3$)

Application factorisation (Rappel : Sans calculatrice) :

Exercice 1 : Factoriser $n^5 - n$ au maximum

Exercice 2 : Factoriser $n^7 - n$ au maximum

Exercice 3 : Montrer que 127 divise $2^{21} - 1$

Exercice 4 : Montrer que 1023 divise $2^{40} - 1$

Exercice 5 : Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre : 1004006004001

Exercice 6 : Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre : 1007021035035021007001

Le mot de la fin :

Développer : 1) $\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ 2) $\sqrt{\frac{\sqrt{a^4+4a^2+a^2}}{2}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{a^4+4a^2-a^2}}{2}}$

3) Simplifier $\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$

4) Donner le coefficient devant x^{n-1} du produit $(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n)$

Corrections :

Calculs de base :

Développer : 1) $x^2 - 8x + 15$; 2) $x^2 + 2x - 3$; 3) $5x^2 + 3x - 6$; 4) $x^2 - 6x - 16$
5) $25x^2 + 10x + 1$; 6) $9x^2 - 6x + 1$; 7) $49x^4 + 14x^2 + 1$; 8) $x^4 - 4x^2 + 4$
9) $4x^2 + 4xy + y^2$; 10) $13 - 4\sqrt{13}$; 11) 19 ; 12) 1 ; 13) $7 + 4\sqrt{3}$

Factoriser : 1) $7(p + q)$; 2) $-(x + y)$; 3) $x(x - 3)$; 4) $a(x - y)$; 5) $7x^2(x - 7)$
6) $4x^2(x - 1)$; 7) $(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8})$; 8) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$; 9) $(x - 1)(x + 1)$
10) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$; 11) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$; 12) $2(x - 4)(x + 4)$
13) $(x + 2 - \sqrt{7})(x + 2 + \sqrt{7})$ 14) $(2x - 3 - \sqrt{5})(2x - 3 + \sqrt{5})$
15) $(x^2 - 1)(x^2 + 3) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3)$; 16) $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})(x^2 + 5)$
17) $(x - 3)^2$; 18) $(x - 2)^2$; 19) $2(x - 7)^2$; 20) $(2x^2 + 1)^2$

Résolution d'équation : 1) $x = -1$; 2) $x = \frac{2}{3}$; 3) $x = \frac{-2}{7}$; 4) $x = 4$
5) $x = \frac{-3}{2}$; 6) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$ donc $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$
7) $x = \sqrt{\frac{2}{7}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{2}{7}}$; 8) $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$
9) $3x^2 = -1$ or un carré est positif donc l'équation n'admet pas de solutions.
10) $(x + 6 - \sqrt{2})(x + 6 + \sqrt{2}) = 0$ donc soit $x = -6 + \sqrt{2}$ soit $x = -6 - \sqrt{2}$
11) $x = \frac{-2 - \sqrt{3}}{7}$ et $x = \frac{-2 + \sqrt{3}}{7}$; 12) $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$ ou $x = 1$ ou
 $x = -1$; 13) $x = \frac{2}{5}$; 14) $x = \frac{-3}{2}$; 15) $x = \frac{-9}{2}$

Résolution d'équations en 2 temps :

Exercice 1 :

1) $x^2 - 6x + 4$
2) $x^2 - 6x + 4 = 0$ donc $(x - 3)^2 - 5 = 0$ donc $(x - 3 - \sqrt{5})(x - 3 + \sqrt{5}) = 0$
soit $x = 3 + \sqrt{5}$ soit $x = 3 - \sqrt{5}$

Exercice 2 :

1) $16x^2 - 40x + 23$
2) $16x^2 - 40x + 23 = 0$ donc $(4x - 5)^2 - 2 = 0$ donc $(4x - 5 - \sqrt{2})(4x - 5 + \sqrt{2}) = 0$
soit $x = \frac{5 + \sqrt{2}}{4}$ soit $\frac{5 - \sqrt{2}}{4}$

Exercice 3 :

1) $4x^2 + 4x - 6$
2) $4x^2 + 4x - 6 = 0$ donc $(2x + 1)^2 - 7 = 0$ donc $(2x + 1 - \sqrt{7})(2x + 1 + \sqrt{7}) = 0$
soit $x = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2}$ soit $\frac{-1 - \sqrt{7}}{2}$

Exercice 4 :

1) $x^4 - 2x^2 - 3$
2) $(x^2 - 1) - 4 = 0$ donc $(x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$ soit $x = \sqrt{3}$ soit $x = -\sqrt{3}$

Simplification (1) :

- 1) $3\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{11}$; 3) $7\sqrt{2}$; 4) $5\sqrt{2}$; 5) $4\sqrt{3}$; 6) $3\sqrt{5}$; 7) $5\sqrt{3}$
 8) $\frac{6}{5}$; 9) $\frac{11}{2}$; 10) $\frac{15}{11}$; 11) $\frac{9}{8}$; 12) $\frac{6}{5}$; 13) $\frac{b^2}{7a}$

Simplification (2) :

- 1) $\frac{(x-1)(x+1)}{2(x+1)} = \frac{x-1}{2}$; 2) a ; 3) $\frac{7x}{2}$; 3) $x^2 - y^2$; 4) $\frac{2x+1}{3}$
 5) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; 6) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$; 7) $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$; 8) $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$; 9) $\frac{4+\sqrt{5}}{2}$

Factorisation challenge :

$$X^4+1 = X^4+2X^2+1-2X^2 = (X^2+1)^2-2X^2 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$$

Comparaison de fractions :

- 1) $\frac{11}{10} - \frac{9}{8} = \frac{-2}{80} \leq 0$ donc $\frac{11}{10} \leq \frac{9}{8}$
 2) $\frac{7}{8} - \frac{5}{6} = \frac{2}{48} \geq 0$ donc $\frac{7}{8} \geq \frac{5}{6}$
 3) $\frac{13}{5} - \frac{14}{6} = \frac{78-70}{30} \geq 0$ donc $\frac{13}{5} \geq \frac{14}{6}$
 4) $\frac{17}{8} - \frac{19}{9} = \frac{153-152}{72} \geq 0$ donc $\frac{17}{8} \geq \frac{19}{9}$

Exercice :

- 1) $3 - \sqrt{13} = \frac{(3 - \sqrt{13})(3 + \sqrt{13})}{3 + \sqrt{13}} = \frac{-4}{3 + \sqrt{13}} \leq 0$ donc $3 \leq \sqrt{13}$
 2) $7 - \sqrt{50} = \frac{(7 - \sqrt{50})(7 + \sqrt{50})}{7 + \sqrt{50}} = \frac{-1}{7 + \sqrt{50}} \leq 0$ donc $7 \leq \sqrt{50}$
 3) $8 - 5\sqrt{2} = \frac{(8 - 5\sqrt{2})(8 + 5\sqrt{2})}{8 + 5\sqrt{2}} = \frac{14}{8 + 5\sqrt{2}} \geq 0$ donc $5\sqrt{2} \leq 8$

Calculs approfondis :**Factorisation éclair :****Exercice 1 :**

- 1) $(x-6)(x-2)$; 2) $(x-7)(x-1)$; 3) $(x-3)(x-5)$; 4) $(x-7)(x-5)$
 5) $(x-5)(x-6)$; 6) $(x-8)(x-1)$; 7) $(x-1)(x-\frac{1}{2})$; 8) $(x-\sqrt{a})(x-2\sqrt{a})$

Exercice 2 :

- 1) $x = 4$ et $x = 5$; 2) $x = 3$ et $x = 7$; 3) $x = 7$ et $x = 6$
 4) $x = n$ et $x = 1$; 5) $x = 1$ et $x = \sqrt{3}$

Image d'un point et composition :**Exercice 1 :**

- 1) $f(3) = 3^2 - 7 \times 3 + 6$; 2) $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$
 3) $f(-3) = \frac{(-3)^2 - 1}{(-3)^2 + 1} = \frac{8}{10}$; 4) $f(5) = \sqrt{3 \times 5 - 7} = \sqrt{8}$

Exercice 2 :

- 1) $f(1) = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$; $f(2x) = \frac{2x+1}{2x+2}$
 $f(a+1) = \frac{a+1+1}{a+2+2} = \frac{a+2}{a+4}$; $f(a+h) = \frac{a+h+1}{a+h+2}$
 2) $g(1) = \sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2}$; $g(2x) = \sqrt{(2x)^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 1}$
 $g(a+1) = \sqrt{(a+1)^2 + 1} = \sqrt{a^2 + 2a + 2}$; $g(a+h) = \sqrt{(a+h)^2 + 1} = \sqrt{a^2 + 2ah + h^2 + 1}$
 3) $k(1) = 1^3 - 1 + 1 = 1$; $k(2x) = (2x)^3 - 2x + 1 = 8x^3 - 2x + 1$
 $k(a+1) = (a+1)^3 - (a+1) + 1 = (a+1)^3 - (a+h) + 1$
 4) $h(1) = 4$; $h(2x) = 4$; $h(a+1) = 4$; $h(a+h) = 4$

Point appartenant à une courbe :**Exercice 1 :**

- 1) $f(4) = 4^2 - 16 = 0$ donc $(4; 0) \in C_f$
 2) $f(1) = 1^3 = 1$ donc $(1; 1)$
 3) $f(2) = 1 - \sqrt{2} \neq -1$ donc $(2; -1) \notin C_f$

Exercice 2 : $(a; a) \in C_f$ si $f(a) = a$ or $f(a) = 2a + 1$ donc il faut que $f(a) = a$ soit $2a + 1 = a$ ainsi $2a - a = -1$ donc $a = -1$. Pour $a = -1$, $(-1; -1) \in C_f$

Calcul de $f \circ g$ **Exercice 1 :**

- 1) $f(g(x)) = 3\sqrt{x} + 2$ et $g(f(x)) = \sqrt{3x+2}$; 2) $f(g(x)) = \frac{1}{\cos(x)+1}$ et
 $g(f(x)) = \cos(\frac{1}{x+1})$

Exercice 2 et 3 : Par le calcul on trouve $f \circ f(x) = f(f(x)) = x$

Factorisation avancée :

Complément :

- 1) $(a+b)^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- 2) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3 = a^3-b^3$
- 3) Même calcul
- 4) Même calcul
- 5) $(a+b)^4 = (a^2+2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2) = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
- 6) $(a+b+c)^2 = a^2+2a(b+c)+(b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
- 7) $a^7-b^7 = (a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$
- 8) $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et $x^3+1 = x^3-(-1)^3 = (x+1)(x^2-x+1)$

Applications :

Exercice 1 :

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$$

Exercice 2 :

$$n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^3 - 1)(n^3 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$$

$$\textbf{Exercice 3 : } 2^{21} - 1 = (2^7)^3 - 1 = (2^7 - 1)((2^7)^2 + 2^7 + 1) \text{ et } 2^7 - 1 = 127$$

$$\textbf{Exercice 4 : } 2^{40} - 1 = (2^{10})^4 - 1 = (2^{10} - 1)(2^{30} + 2^{20} + 2^{10} + 1)$$

Exercice 5 : On remarque que l'on retrouve exactement les coefficients de l'identité remarquable $(a+b)^4$ on a même :

$$(10^3)^4 + 4 \times (10^3)^3 + 6 \times (10^3)^2 + 4 \times 10^3 + 1 = (10^3 + 1)^4 = 1001^4$$

$$\text{Or } 10^3 + 1 = (10 + 1)(10^2 - 10 + 1) = 11 \times 91 \text{ et } 91 = 7 \times 13.$$

$$\text{Ainsi : } 1004006004001 = 7^4 \times 11^4 \times 13^4$$

Exercice 6 : Coefficient de $(a+b)^7$ il s'agit du nombre $(10^3 + 1)^7$

Mot de la fin :

$$1) c ; 2) a ; 3) 1 + \frac{1}{k(k+1)} ; 4) -(1+2+3+\dots+n)$$