Entraînement : Etude de fonctions

Entraînement

1 Aide-raisonnement (apprenez votre cours aussi)

1) Pour définir $\sqrt{a}$ il faut que le nombre a soit positif, quant au nombre $\sqrt{a}$, il est toujours positif.

2) Lorsque vous voyez un quotient : le dénominateur ne devra jamais être nul.

3) Les fonctions affines sont définies sur $\mathbb{R}$

2 Ensemble de définition et signe :

1) f définie par $f(x) = 6x - 5$

2) g définie par $g(x) = \dfrac{5}{x-5}$

3) h définie par $h(x) = \sqrt{5x+3}$

4) i définie par $i(x) = \sqrt{3x^2+5}$

5) $j$définie par $j(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

6) k définie par $k(x) = \sqrt{5x^2-9}$

7) $l$définie par $l(x) = \dfrac{3x-1}{3x^2-2}$

8) m définie par $m(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2-4}$

9) p définie par $p(x) = \dfrac{3x-5}{x^2+3}$

10) q définie par $q(x) = \sqrt{\dfrac{6x-1}{x^2-5}}$

11) r définie par $r(x) = \dfrac{x^2-3}{3x+5}$

12) s définie par $s(x) = 3x\sqrt{7x+9}$

3 Correction :

3.1 Avant-propos : conseils (APPRENEZ VOTRE COURS)

Avant tout : n'apprenez jamais par coeur les solutions, ce sera un temps gâché énorme : vous n'apprendrez rien comme cela et vous aurez une mauvaise note. Mettez du sens dans ce que vous faites : soyez capables d'expliquer vos calculs par les propriétés de calcul du cours, vos raisonnements par les définitions etc. N'écrivez rien sans que vous ne soyez capable d'expliquer pourquoi.

3.2 Corrections :

1) f est une fonction affine, donc par définition d'une fonction affine, f est définie sur $\mathbb{R}$. donc $D_f = \mathbb{R}$

Remarque : N'apprenez pas par coeur cette phrase, comprenez comment on applique le cours ici !!!!!!!

Etude du signe de f : $f(x) = 0$ pour $x = \frac{5}{6}$, de plus le coefficient directeur de f est $6 \geq 0$ donc d'après le cours (et oui c'est dans le cours) on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$6x-5$		$-$	0	$+$	

2) Sur-rédaction pour comprendre : $g(x) = \frac{5}{x-5}$ pour que g soit définie, il faut que le dénominateur (ce par quoi on divise) soit différent de 0. On divise par $x-5$ donc il faut que $x-5 \neq 0$. Pour quelle valeur de x a-t-on $x-5=0$? On résout l'équation $x-5=0$ donc $x=5$ donc $D_g =]-\infty; 5[\cup]5; +\infty[$

Rédaction attendue : Pour que g soit définie il faut que $x-5 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 5$ donc $D_g =]-\infty; 5[\cup]5; +\infty[$

Remarque : Encore une fois n'apprenez pas la phrase par coeur, mettez du sens, pour cela il faut comprendre la sur rédaction qui explique chaque détail.

Etude du signe de g (sur rédaction) :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
5		$+$		$+$	
$x-5$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{5}{x-5}$		$-$	$\|$	$+$	

On met une double barre car on ne peut pas mettre un 0 quand $x = 5$, et surtout car $\dfrac{5}{x-5}$ n'est pas défini en 5 compte tenu de ce qu'on a dit avant l'étude du signe.

Rédaction attendue : Le signe de $g(x)$ est le même que celui de $x - 5$ donc

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$\dfrac{5}{x-5}$		$-$	$\|$	$+$	

3) Sur rédaction : Pour que $\sqrt{5x+3}$ soit bien définie il faut que $5x + 3$ soit positif.

Etudions le signe de $5x + 3$:

Fonction affine dont le coefficient directeur est $5 \geq 0$ donc d'après le COURS :

x	$-\infty$		$\dfrac{-3}{5}$		$+\infty$
$5x+3$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe, on en déduit que $5x + 3 \geq 0$ quand $x \in [\frac{-3}{5}; +\infty[$ donc $D_h = [\frac{-3}{5}; +\infty[$ Ne pas oublier : Le signe de h, $h(x)$ est une racine carrée donc h est positive.

Remarque : Par pitié et pour votre dignité intellectuelle N'APPRENEZ PAS PAR COEUR LES PHRASES!! Mettez du sens en comprenant cette argumentation.

Rédaction attendue : Il faut que $5x+3$ soit positif, or :

x	$-\infty$		$\frac{-3}{5}$		$+\infty$
$5x+3$		$-$	0	$+$	

Donc $D_h = [\frac{-3}{5};+\infty[$ De plus $h(x)$ est une racine carrée, donc h est positive.

Erreur type de l'élève :

Il faut que $5x+3$ soit positif, on résout $5x+3=0$ donc :

x	$-\infty$		$\frac{-3}{5}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

Donc $D_h = [\frac{-3}{5};+\infty[$ Plusieurs erreur : 1) Il dit dans le tableau de signe que $h(x)$ est négatif alors que c'est une racine carrée d'un nombre donc $h(x)$ est positif, il ne donne pas le signe de $h(x)$ ici mais de $5x+3$ 2) Comme il donne un tableau de signe il pense que c'est celui de la fonction demandée donc ne donne pas le signe de h donc ne répond pas à la question.

4) Pour que $\sqrt{3x^2+5}$ soit défini, il faut que $3x^2+5$ soit positif. Or $3x^2$ est positif (x^2 est un carré) et 5 est positif, donc pour tout x rée, $3x^2+5$ est positif car somme de deux nombres positifs. Donc $D_i = \mathbb{R}$. De plus i est positive comme racine carrée d'un nombre.

Erreur trop souvent vue : Trop habitué à apprendre des méthodes au lieu du cours les élèves voient une expression qui ressemble à a^2-b^2 et s'empressent de factoriser CE QUI N'EST PAS FACTORISABLE, et là c'est le drame c'est la foire aux bêtises hélas...

Répétez après moi : a au carré MOINS b au carré...

5) Pour que $\frac{1-x}{1+x}$ soit définie, il faut que le dénominateur $1+x$ ne soit pas égal à 0 donc $x \neq -1$ donc $D_j =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

Signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{1-x}{1+x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Erreur trop souvent vue : après avoir fait le tableau de signe, l'élève qui apprend uniquement les méthodes sans mettre de sens conclut que $D_j =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ et c'est n'importe quoi...

6) Pour que $\sqrt{5x^2-9}$ soit bien définie, il faut que $5x^2-9 \geq 0$.

Etudions le signe de : $5x^2-9 = (\sqrt{5}x-3)(\sqrt{5}x+3)$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{\sqrt{5}}$		$\frac{3}{\sqrt{5}}$		$+\infty$
$\sqrt{5}x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{5}x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x^2-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$5x^2-9$ est positif quand $x \in]-\infty;\frac{-3}{\sqrt{5}}] \cup [\frac{3}{\sqrt{5}};+\infty[$

De plus $k(x)$ est une racine carrée donc k est positive.

Remarque : Les crochets sont fermés dans l'ensemble de définition, on peut prendre la racine carrée de 0

7) Il faut que $3x^2-2 \neq 0$, on résout $3x^2-2=0$ donc $(\sqrt{3}x-\sqrt{2})(\sqrt{3}x+\sqrt{2})=0$ donc $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ou $x=\frac{-\sqrt{2}}{3}$

Donc $D_l =]-\infty;\frac{-\sqrt{2}}{3}[\cup]\frac{-\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{2}}{3}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{3};+\infty[$

Signe de l :

1) signe de $3x^2 - 2 = (\sqrt{3}x - 2)(\sqrt{3}x + 2)$

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$\sqrt{3}x - \sqrt{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{3}x + \sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x^2 - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) Signe de $3x - 1$: fonction affine de coefficient directeur 3 donc :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x - 1$		$-$	0	$+$	

Pour bien placer les nombres $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{1}{3}$ étudions leur différence :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3})(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3})}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}} \leq 0 \text{ car } \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{1-6}{9} = \frac{-5}{9} \leq 0$$

et le dénominateur de la grosse fraction est positif car somme de deux nombres positifs. Donc $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$3x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x^2 - 2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$l(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

8) Pour que $\dfrac{x^2-2}{x^2-4}$ soit bien définie, il faut que $x^2-4 \neq 0$

On résout $x^2-4=0 \quad (x-2)(x+2)=0$ donc $x=-2$ ou $x=2$.
Donc $D_m =]\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$

Signe :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-\sqrt{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
x^2-2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$m(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

9) Il faut que le dénominateur de p soit non nul, on résout l'équation pour

savoir pour quelle valeur de x on a : $x^2+3=0$:

$x^2+3=0$ donc $x^2=-3$ ce qui est impossible, donc x^2+3 n'est jamais égal à 0 quelque soit le x réel donc $D_p=\mathbb{R}$

Signe : $3x-5$ est une fonction affine, donc on connaît son signe d'après le cours, quant au signe de x^2+3 il est positif car somme de deux nombres positifs donc :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
x^2+3		$+$		$+$	
$3x-5$		$-$	0	$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$	

10) Réfléchissez bien, encore une fois ne balancez pas une phrase sans la comprendre du type "Il faut que tel truc soit positif, on résout" ce n'est pas ça faire des mathématiques.

Pour définir la racine de $\frac{6x-1}{x^2-5}$, il faut que le nombre $\frac{6x-1}{x^2-5}$ soit positif. Il vous est interdit de dire une chose en mathématiques sans être capable de l'expliquer. Ce nombre doit être positif car on ne définit la racine carrée d'un nombre uniquement pour un nombre positif.

Il faut également que le dénominateur du quotient ne soit pas égal à 0 donc $x \neq -\sqrt{5}$ et $x \neq \sqrt{5}$

Etudions le signe de $\frac{6x-1}{x^2-5}$ (et ce ne sera pas le signe de $q(x)$!!!!)

$6x-1$ fonction affine de coefficient directeur 6 on sait établir son signe.

$x^2-5=(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ produit de deux fonctions affines de coefficients directeur 1 (et non pas x JAMAIS)

On voit facilement que $\frac{1}{6} \leq 1$ et $1 \leq \sqrt{5}$ donc $\frac{1}{6} \leq \sqrt{5}$ On en déduit :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\frac{1}{6}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$6x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+\sqrt{5}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{5}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{6x-1}{x^2-5}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$\frac{6x-1}{x^2-5} \geq 0$ pour $x \in]-\sqrt{5}; \frac{1}{6}] \cup]\sqrt{5}; +\infty[$

Donc $D_q =]-\sqrt{5}; \frac{1}{6}] \cup]\sqrt{5}; +\infty[$

Attention on peut prendre $\frac{1}{6}$ c'est le dénominateur qui ne doit pas être le nul, le numérateur : aucun problème on peut diviser 0, on ne peut pas diviser par 0 !! (Le français est important...)

Le signe de q est positif car racine carrée d'un nombre.

11) Il faut que le dénominateur ne soit pas nul (pourquoi ? Car on ne divise pas par 0 !!)

Le dénominateur est nul quand $3x+5=0$ soit $x = \frac{-5}{3}$

Donc $D_r =]-\infty; \frac{-5}{3}[\cup]\frac{-5}{3}; +\infty[$

Pour le signe il faut savoir placer $\frac{-5}{3}$, qui est le plus grand entre $\sqrt{3}$ et $\frac{5}{3}$?

$\sqrt{3} - \frac{5}{3} = \frac{3\sqrt{3}-5}{3} = \frac{(3\sqrt{3}-5)(3\sqrt{3}+5)}{3(3\sqrt{3}+5)} = \frac{2}{3(3\sqrt{3}+5)} \geq 0$

Donc $\sqrt{3} \geq \frac{5}{3}$ donc $-\sqrt{3} \leq \frac{-5}{3}$

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\frac{-5}{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3x+5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^2-3}{3x+5}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

12) Pour que la racine de $7x+9$ soit définie il faut que le nombre $7x+9$ soit positif, étudions donc le signe de $7x+9$:

C'est une fonction affine de coefficient directeur 7 on en déduit le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{-9}{7}$		$+\infty$
$7x+9$		$-$	0	$+$	

Donc $7x+9$ est positif si $x \in [\frac{-9}{7};+\infty[$

Donc $D_s = [\frac{-9}{7};+\infty[$

Le signe de $\sqrt{7x+9}$ est positif car racine carrée d'un nombre, quant au nombre $3x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de signe suivant (attention il faut l'ensemble de définition avant) :

x	$\frac{-9}{7}$		0		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{7x+9}$	0	$+$		$+$	
$s(x)$	0	$-$	0	$+$	