Etudes de fonctions

Seconde

1 Rappels de cours

Fonction croissante : Soit f une fonction, on dit qu'elle est croissante sur un intervalle I si pour tout a et $b \in I$ tels que $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
Remarque : f conserve l'inégalité.

Fonction décroissante : Soit f une fonction, on dit qu'elle est décroissante sur un intervalle I si pour tout a et $b \in I$ tels que $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$.
Remarque : f renverse l'inégalité.

Fonction constante : Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est constante si pour tout $x \in D$ $f(x) = c$ un nombre fixé.

Quelques exemples :

Théorème : Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ $a \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors si $a \geq 0$ f est croissante et si $a \leq 0$ alors f est décroissante.
Démonstration :
Supposons $a \geq 0$: Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. $f(x) - f(y) = ax + b - (ay + b) = ax - ab = a(x - y)$ or $a \geq 0$ et $x - y \leq 0$ car $x \leq y$ donc $f(x) - f(y) \leq 0$ donc $f(x) \leq f(y)$
Supposons $a \leq 0$: Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. $f(x) - f(y) = ax + b - (ay + b) = ax - ab = a(x - y)$ or $a \leq 0$ et $x - y \leq 0$ car $x \leq y$ donc $f(x) - f(y) \geq 0$ donc $f(x) \geq f(y)$

Théorème : La fonction carrée définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$
Démonstration :
Soient x et $y \in]-\infty; 0]$ alors x et y sont négatifs, tels que $x \leq y$. $f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ or $x - y \leq 0$ car $x \leq y$ et $x + y \leq 0$ comme somme de deux nombres négatifs, donc $x^2 - y^2 \geq 0$ d'après la règle des signes, donc $f(x) \geq f(y)$
Soient x et $y \in [0; +\infty[$ alors x et y sont positifs, tels que $x \leq y$. $f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ or $x - y \leq 0$ car $x \leq y$ et $x + y \geq 0$ comme somme de deux nombres positifs, donc même argument : $x^2 - y^2 \leq 0$, donc $f(x) \leq f(y)$

Théorème : La fonction racine carrée définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0; +\infty[$ est croissante.
Démonstration : Soient $x, y \in [0; +\infty[$ tels que $x \leq y$
$f(x) - f(y) = \sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dfrac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq 0$ car $x \leq y$

Théorème : La fonction inverse définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$
Démonstration :
Sur $]-\infty; 0[$: Soit x et $y \in]-\infty; 0[$ tels que $x \leq y$ alors :
$f(y) - f(x) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - y}{xy} \leq 0$ car $x - y \leq 0$ et $xy \geq 0$ donc $f(y) \leq f(x)$
Sur $]0; +\infty[$: Soit x et $y \in]0; +\infty[$ tels que $x \leq y$ alors :
$f(x) - f(y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - y}{xy} \leq 0$ car $x - y \leq 0$ et $xy \geq 0$ donc $f(y) \leq f(x)$

Remarque : On peut se demander pourquoi nous ne disons pas que la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ son ensemble de définition, en effet f est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ mais pas sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. Car si on prend $-4 \in]-\infty; 0[$ et $4 \in]0; +\infty[$ alors on a bien :

$f(-4) = \dfrac{1}{-4} \leq 0 \leq \dfrac{1}{4} = f(4)$. Ainsi on a : $-4 \leq 4$ et $f(-4) \leq f(4)$, donc f n'est pas décroissante sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Donc on regardera les variations uniquement sur des intervalles (ensembles de la forme $]a; b]$ crochets ouverts ou fermés, a ou b pouvant être infini)

Quelques rappels sur les inégalités

Rappel définition : Dire que $x \leq y$ veut dire que $y - x$ est positif

On considère une inégalité de la forme : $x \leq y$

Addition dans les deux membres : On peut additionner un nombre peu importe lequel ainsi : si $x \leq y$ alors $x + a \leq y + a$
Multiplication dans les deux membres : Si on multiplie les deux membres par un même nombre alors deux cas se présentent :
1) Si le nombre a est positif, rien ne change : $x \leq y$ alors $ax \leq ay$
2) Si le nombre a est négatif alors on inverse les inégalités : $x \leq y$ alors $ay \leq ax$
Transitivité de l'inégalité : Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$

Remarque 1 : Ces propriétés peuvent être démontrées à l'aide de la définition avec le signe.
Remarque 2 : On utilisera dans les raisonnement à inégalités les variations de fonctions, ainsi si a et $b \in I$ tels que $a \leq b$ et qu'une fonction f est décroissante sur I alors $f(b) \leq f(a)$ de même si f est croissante alors $f(a) \leq f(b)$

2 Exercices :

2.1 Etudes de fonctions (exercices corrigés) :

Exercice 1 : Etude de f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$

1) Donner l'ensemble de définition D_f de f
2) Donner le tableau de signe de f
3) Déterminer les variations de f
4) Résoudre l'inéquation : $f(x) \leq 1$

Exercice 2 : Etude de f définie par $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$

1) Donner l'ensemble de définition D_f de f
2) Donner le tableau de signe de f
3) Montrer que pour tout $x \in D_f$ $f(x) = 1 + \dfrac{6}{x-4}$
4) Déterminer les variations de f
5) Montrer que pour $x > 4$, $f(x) \geq 1$

Exerice 3 : Etude de f définie par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$

1) Donner l'ensemble de définition D_f de f
2) Donner le tableau de signe de f
3) Montrer que pour tout $x \in D_f$ $f(x) = 3 - \dfrac{7}{x+2}$
4) Déterminer les variations de f
5) Montrer que pour $x > -2$, $f(x) \leq 3$

Exercice 4 : Etude de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

1) Donner l'ensemble de définition D_f de f
2) Donner le tableau de signe de f
3) Montrer que pour tout $x \in D_f$ $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$
4) Déterminer les variations de f
5) Montrer que pour $x \in D_f$, $f(x) \leq 1$

Exercice 5 : Etude de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

1) Donner l'ensemble de définition D_g de g
2) Donner le tableau de signe de f
3) Montrer que pour tout $x \in D_g$ $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2-1}$
4) Déterminer les variations de g
5) Montrer que pour $x > 1$, $g(x) \geq 1$

Exercice 6 : Etude de la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{4x+5}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_h de h
2) Déterminer les variations de h
3) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $2\sqrt{x} \leq h(x)$

Exercice 7 : Etude de g définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - 5}$

1) Donner l'ensemble de définition D_g de g
2) Déterminer les variations de g
3) Montrer que pour tout $x \geq \sqrt{5}$, $g(x) \leq x$

Exercice 8 : Etude de g définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 2}$

1) Montrer que $(x-2)^2 - 2 = x^2 - 4x + 2$
2) En déduire l'ensemble de définition de g
3) Déterminer les variations de g
4) Montrer que pour tout $x \geq 2$, $g(x) \leq x$

Exercice 9 : Etude de g définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 4}$

1) Montrer que $(x-3)^2 - 5 = x^2 - 6x + 4$
2) En déduire l'ensemble de définition de g
3) Déterminer les variations de g
4) Montrer que pour tout $x \geq 3$, $g(x) \leq x$

2.2 Exercices généraux (non corrigés) :

Exercice 1 : Déterminer les variations de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ Déterminer les variations de f définie par $f(x) = x^{2^n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice 3 : variations de la fonction $f(x) = x^3$
1) Soient a et b deux réels démontrer que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
2) Justifiez que $a^2 + b^2 \geq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$
3) En déduire que $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ (*Indication : développez* $(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}})^2$)
4) En déduire que f est croissante sur $]-\infty; +\infty[$

Exercice 4 : Soient a, b , c, d, 4 réels, on définit f par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
1) Donner l'ensemble de définition de f
2) Montrer que si $ad - bc = 0$ alors f est constante.
3) On suppose $ad - bc \neq 0$ déterminer les variations de f

3 Corrigé :

3.1 Etudes de fonctions

Exercice 1 :

1) f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$ il faut donc que le dénominateur soit non nul, donc on résout l'équation : $x + 4 = 0$ donc $x = -4$. Le dénominateur s'annule en -4 donc $D_f =]-\infty; -4[\cup]-4; +\infty[$

2)

Comme $x + 4$ est une fonction affine de coefficient directeur 1 positif on en déduit le signe :

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	

3) La fonction est définie presque comme une fonction inverse. Montrons que f est décroissante sur $]-\infty; -4[$ et sur $]-4; +\infty[$:

Sur $]-\infty; -4[$: Soit x et $y \in]-\infty; -4[$ tels que $x \leq y$ alors : $x + 4 \leq y + 4 < 0$ et par décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty; 0[$ on a $\dfrac{1}{y+4} \leq \dfrac{1}{x+4}$

Donc f est bien décroissante sur $]-\infty; -4[$

Sur $]-4; +\infty[$: Soit x et $y \in]-4; +\infty[$ tels que $x \leq y$ alors : $x + 4 \leq y + 4 < 0$ et par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ on a $\dfrac{1}{y+4} \leq \dfrac{1}{x+4}$

Donc f est bien décroissante sur $]-4; +\infty[$

4) On cherche les réels x tels que $f(x) \leq 1$ c'est à dire $f(x) - 1$ négatif.

$f(x) - 1 = \dfrac{1}{x+4} - 1 = \dfrac{1-(x+4)}{x+4} = \dfrac{-x+3}{x+4}$.

Etudions le signe de $\dfrac{-x+3}{x+4}$:

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x+3}{x+4}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ainsi on lit $f(x)-1$ négatif sur le tableau pour $x \in]-\infty;-4[\cup[3;+\infty[$

Exercice 2 :

1) Il faut que le dénominateur soit non nuls. Cherchons quand le dénominateur s'annule : $x-4=0$ donc $x=4$. Donc $D_f =]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$

2)

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

3) On peut mettre tout au même dénominateur mais en faisant cela on ne prend hélas aucun recul. Forçons nous à arriver jusque là :

$$f(x) = \frac{x+2}{x-4} = \frac{x-4+6}{x-4} = \frac{x-4}{x-4} + \frac{6}{x-4} = 1 + \frac{6}{x-4}$$

Remarque : On a besoin de cette écriture pour les variations de f, donc si nous ne pouvons pas trouver par nous même cette décomposition nous serons toujours dépendant de ces questions subsidiaires, le but étant de s'en débarasser plus tard.

4) Montrons que f est décroissante sur $]-\infty;4[$:

Soient x et $y \in]-\infty;4[$ tels que $x \leq y$ aors :

$x-4 \leq y-4 < 0$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$: $\dfrac{1}{y-4} \leq \dfrac{1}{x-4}$ et donc en multipliaint par 6 :

$\dfrac{6}{y-4} \leq \dfrac{6}{x-4}$ puis en ajoutant 1 : $1+\dfrac{6}{y-4} \leq 1+\dfrac{6}{x-4}$ soit $f(y) \leq f(x)$

Donc f est décroissante sur $]-\infty;4[$

Montrons que f est décroissante sur $]4;+\infty[$:

Soient x et $y \in]4;+\infty[$ tels que $x \leq y$ aors :

$0 < x-4 \leq y-4$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}+-^*$: $\dfrac{1}{y-4} \leq \dfrac{1}{x-4}$ et donc en multipliaint par 6 :
$\dfrac{6}{y-4} \leq \dfrac{6}{x-4}$ puis en ajoutant 1 : $1+\dfrac{6}{y-4} \leq 1+\dfrac{6}{x-4}$ soit $f(y) \leq f(x)$

Donc f est décroissante sur $]4;+\infty[$

5) pour x strictement supérieur à 4, $x-4$ est strictement positif, ainsi : $f(x)-1 = 1+\dfrac{6}{x-4}-1 = \dfrac{6}{x-4} \geq 0$

Exercice 3 :

1) Il faut que le dénominateur soit non nul, donc $x \neq -2$ donc $D_f =]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

2) $3x-1$ est une fonction affine de coefficient directeur $3 \geq 0$ on en déduit :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

3) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2} = \dfrac{3(x+2)-6-1}{x+2} = \dfrac{3(x+2)}{x+2} - \dfrac{7}{x+2} = 3 - \dfrac{7}{x+2}$

4) Montrons que f est croissante sur $]-\infty;-2[$

Soit x et $y \in]-\infty;-2[$ tels que $x \leq y$

Donc $x+2 \leq y+2 \leq 0$ donc la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ donc $\frac{1}{y+2} \leq \frac{1}{x+2}$ et $\frac{-7}{x+2} \leq \frac{-7}{y+2}$ donc $3-\frac{7}{x+2} \leq 3-\frac{7}{y+2}$ donc $f(x) \leq f(y)$

Montrons que f est croissante sur $]-2;+\infty[$

Soit x et $y \in]-2;+\infty;[$ tels que $x \leq y$

Donc $x+2 \leq y+2 \geq 0$ donc la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc $\frac{1}{y+2} \leq \frac{1}{x+2}$ et $\frac{-7}{x+2} \leq \frac{-7}{y+2}$ donc $3-\frac{7}{x+2} \leq 3-\frac{7}{y+2}$ donc $f(x) \leq f(y)$

5) Si $x \geq 2$ alors $x+2 \geq 0$ donc $\frac{-7}{x+2} \leq 0$ et donc $3-\frac{7}{x+2} \leq 3$ et donc $f(x) \leq 3$

Exercice 4 :

1) Il faut que le dénominateur x^2+1 ne soit jamais égal à 0.
On résout l'équation : $x^2+1=0$ donc $x^2=-1$ impossible car $x^2 \geq 0$ et -1 est strictement négatif. Donc x^2+1 n'est jamais égal 0 donc $D_f = \mathbb{R}$

2)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		+	0	+	
x^2+1		+		+	
$f(x)$		+	0	+	

3) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$

4) Montrons que f est décroissante sur $]-\infty;0]$:

Soient $x, y \in]-\infty;0]$ tels que $x \leq y$. Par décroissance de la fonction carrée sur $]-\infty;0]$ on a : $y^2 \leq x^2$ donc $y^2+1 \leq x^2+1$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$ on a :

$\dfrac{1}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{y^2+1}$ donc : $\dfrac{-1}{y^2+1} \leq \dfrac{-1}{x^2+1}$ donc : $1 - \dfrac{1}{y^2+1} \leq 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$
soit $f(y) \leq f(x)$. Donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$

Montrons que f est croissante sur $[0; -\infty[$:

Soient $x, y \in [0; -\infty[$ tels que $x \leq y$. Par croissance de la fonction carrée sur $[0; -\infty[$ on a : $x^2 \leq y^2$ donc $x^2+1 \leq y^2+1$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ on a :

$\dfrac{1}{y^2+1} \leq \dfrac{1}{x^2+1}$ donc : $\dfrac{-1}{x^2+1} \leq \dfrac{-1}{y^2+1}$ donc : $1 - \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1 - \dfrac{1}{y^2+1}$
soit $f(x) \leq f(y)$. Donc f est croissante sur $[0; -\infty[$

5) pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \leq x^2+1$ or x^2+1 est strictement positif donc $\dfrac{x^2}{x^2+1} \leq \dfrac{x^2+1}{x^2+1} = 1$

Exercice 5 :

1) Il faut que le dénominateur $x^2 - 1$ soit non nul.
On résout l'équation $x^2 - 1 = 0$ soit $(x-1)(x+1) = 0$
Soit $x - 1 = 0$ donc $x = 1$ soit $x + 1 = 0$ donc $x = -1$
Ainsi $D_g =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

2)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1} = \dfrac{x^2-1+1}{x^2-1} = \dfrac{x^2-1}{x^2-1} + \dfrac{1}{x^2-1} = 1 + \dfrac{1}{x^2-1}$

4) Variations sur $]-\infty; -1[$: Soient $x, y \in]-\infty; -1[$ tels que $x \leq y$.

Par décroissance de la fonction carrée sur $]-\infty; 0]$ on a : $1 \leq y^2 \leq x^2$ donc

$0 \leq y^2 - 1 \leq x^2 - 1$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ on a : $\dfrac{1}{x^2-1} \leq \dfrac{1}{y^2-1}$ donc : $1 + \dfrac{1}{x^2-1} \leq 1 + \dfrac{1}{x^2-1}$ donc $f(x) \leq f(y)$ donc f est croissante sur $]-\infty; -1[$

Variations sur $]-1; 0]$: Soient $x, y \in]-1; 0]$ tels que $x \leq y$.

Par décroissance de la fonction carrée sur $]-\infty; 0]$ on a : $0 \leq y^2 \leq x^2 \leq 1$ donc $y^2 - 1 \leq x^2 - 1 \leq 0$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty; 0[$ on a : $\dfrac{1}{x^2-1} \leq \dfrac{1}{y^2-1}$ donc : $1 + \dfrac{1}{x^2-1} \leq 1 + \dfrac{1}{x^2-1}$ donc $f(x) \leq f(y)$ donc f est croissante sur $]-1; 0]$

Variations sur $[0; 1[$: Soient $x, y \in [0; 1[$ tels que $x \leq y$.

Par croissance de la fonction carrée sur $[0; +\infty[$ on a : $0 \leq x^2 \leq y^2 \leq 1$ donc $x^2 - 1 \leq y^2 - 1 \leq 0$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty; 0[$ on a : $\dfrac{1}{y^2-1} \leq \dfrac{1}{x^2-1}$ donc : $1 + \dfrac{1}{y^2-1} \leq 1 + \dfrac{1}{x^2-1}$ donc $f(y) \leq f(x)$ donc f est décroissante sur $[0; 1[$

Variations sur $]1; +\infty[$: Soient $x, y \in]1; +\infty[$ tels que $x \leq y$.

Par croissance de la fonction carrée sur $[0; +\infty[$ on a : $1 \leq x^2 \leq y^2$ donc $0 \leq x^2 - 1 \leq y^2 - 1$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ on a : $\dfrac{1}{y^2-1} \leq \dfrac{1}{x^2-1}$ donc : $1 + \dfrac{1}{y^2-1} \leq 1 + \dfrac{1}{x^2-1}$ donc $f(y) \leq f(x)$ donc f est décroissante sur $]1; +\infty[$

5) Pour $x \geq 1$ alors $x^2 \geq 1$ par croissance de la fonction carrée sur $[0; +\infty[$. Ainsi : $x^2 - 1 \geq 0$. et donc $g(x) - 1 = \dfrac{1}{x^2-1} \geq 0$ donc $g(x) \geq 1$

Exercice 6 :

1) Il faut que $4x + 5$ soit positif pour définir la racine.

$4x + 5 \geq 0$ quand $x \geq \dfrac{-5}{4}$ donc $D_h = [\dfrac{-5}{4}; +\infty[$

2) On va montrer que h est croissante sur $[\dfrac{-5}{4}; +\infty[$:

Soient $x, y \in [\dfrac{-5}{4}; +\infty[$ tels que $x \leq y$ alors :

$(4x \leq 4y$ donc $0 \leq 4x + 5 \leq 4y + 5$ par croissance de la fonction racine sur $[0; +\infty[$ on a :$\sqrt{4x+5} \leq \sqrt{4y+5}$ donc $h(x) \leq h(y)$

3) Soit $x \geq 0$, on calcule $h(x) - \sqrt{2}x =$

$\sqrt{4x+5} - 2\sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{4x+5} - 2\sqrt{x})(\sqrt{4x+5} + 2\sqrt{x})}{\sqrt{4x+5} + 2\sqrt{x}} = \dfrac{4x+5-4x}{\sqrt{4x+5} + 2\sqrt{x}} = \dfrac{5}{\sqrt{4x+5} + 2\sqrt{x}} \geq 0$ donc $h(x) \geq 2\sqrt{x}$

Exercice 7 :

1) Il faut que x^2-5 soit positif pour définir la racine, or $x^2-5 = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ est un produit de deux fonctions affines, de coefficients directeurs 1 on en déduit :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$x+\sqrt{5}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\sqrt{5}$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

On lit sur le tableau que $x^2 - 5$ si $x \in]-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty[$ donc $D_g =]-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty[$

2) Sur $]-\infty; -\sqrt{5}]$ Soient $x, y \in]-\infty; -\sqrt{5}]$ tels que $x \leq y \leq 0$ par décroissance de la fonction carrée sur $]-\infty; 0]$ on a : $5 \leq y^2 \leq x^2$ donc $0 \leq y^2 - 5 \leq x^2 - 5$ et par croissance de la fonction racine sur $[0; +\infty[$ on a : $\sqrt{y^2-5} \leq \sqrt{x^2-5}$ donc $g(y) \leq g(x)$ donc g est décroissante.

Sur $[\sqrt{5}; +\infty[$ Soient $x, y \in [\sqrt{5}; +\infty[$ tels que $\sqrt{5} \leq x \leq y$ par croissance de la fonction carrée sur $[0; +\infty[$ on a : $5 \leq x^2 \leq y^2$ donc $0 \leq x^2 - 5 \leq y^2 - 5$ et par croissance de la fonction racine sur $[0; +\infty[$ on a : $\sqrt{x^2-5} \leq \sqrt{y^2-5}$ donc $g(x) \leq g(y)$ donc g est croissante.

3) Soit $x \geq \sqrt{5}$ Alors $g(x) - x =$

$\sqrt{x^2-5} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2-5} - x)(\sqrt{x^2-5} + x)}{\sqrt{x^2-5} + x} = \dfrac{x^2-5-x^2}{\sqrt{x^2-5} + x} = \dfrac{-5}{\sqrt{x^2-5} + x} \leq 0$ donc $g(x) \leq x$

Exercice 8 :

1) $(x-2)^2 - 2 = x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2 = x^2 - 4x + 2$

2) Il faut que x^2-4x+2 soit positif pour définir la racine carrée. Or d'parès la question 1 on a : $x^2-4x+2=(x-2)^2-2=(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$ c'est un produit de deux fonctions affines on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x-2+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2-\sqrt{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-4x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $x^2-4x+2\geq 0$ pour $x\in]-\infty;2-\sqrt{2}]\cup[2+\sqrt{2};+\infty[$

Donc $D_g=]-\infty;2-\sqrt{2}]\cup[2+\sqrt{2};+\infty[$

3) Sur $]-\infty;2-\sqrt{2}]$ Soient $x,y\in]-\infty;2-\sqrt{2}]$ tels que $x\leq y\leq 2-\sqrt{2}$ ainsi : $x-2\leq y-2\leq -\sqrt{2}\leq 0$ donc par décroissance de la fonction carrée sur $]-\infty;0]$ on a :

$2\leq (y-2)^2\leq (x-2)^2$ donc $0\leq (y-2)^2-2\leq (x-2)^2-2$ soit $0\leq y^2-4y+2\leq x^2-4x+2$ par croissance de la fonction racine sur $[0;+\infty[$

On a : $\sqrt{y^2-4y+2}\leq\sqrt{x^2-4x+2}$ soit $g(y)\leq g(x)$ donc g est décroissante sur $]-\infty;2-\sqrt{2}]$

Sur $[2+\sqrt{2};+\infty[$ Soient $x,y\in[2+\sqrt{2};+\infty[$ tels que $2+\sqrt{2}\leq x\leq y$ ainsi : $\sqrt{2}\leq x-2\leq y-2$ donc par croissance de la fonction carrée sur $[0;+\infty[$ on a :

$2\leq (x-2)^2\leq (y-2)^2$ donc $0\leq (x-2)^2-2\leq (y-2)^2-2$ soit $0\leq x^2-4x+2\leq y^2-4y+2$ par croissance de la fonction racine sur $[0;+\infty[$

On a : $\sqrt{x^2-4x+2}\leq\sqrt{y^2-4y+2}$ soit $g(x)\leq g(y)$ donc g est croissante sur $[2+\sqrt{2};+\infty[$

4) Soit $x\geq 2$ $x-g(x)=$
$x-\sqrt{x^2-4x+2}=\dfrac{(x-\sqrt{x^2-4x+2})(x+\sqrt{x^2-4x+2})}{x+\sqrt{x^2-4x+2}}=\dfrac{x^2-(x^2-4x+2)}{x+\sqrt{x^2-4x+2}}=$
$\dfrac{4x-2}{x+\sqrt{x^2-4x+2}}=\dfrac{2(2x-1)}{x+\sqrt{x^2-4x+2}}\geq 0$

Exercice 9 : 1) $(x-3)^2-5 = x^2-2\times x\times 3+2^2-5 = x^2-6x+4$

2) Il faut que x^2-6x+4 soit positif pour définir la racine carrée. Or d'parès la question 1 on a : $x^2-6x+4 = (x-3)^2-5 = (x-3-\sqrt{5})(x-3+\sqrt{5})$ c'est un produit de deux fonctions affines on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$3-\sqrt{5}$		$3+\sqrt{5}$		$+\infty$
$x-3+\sqrt{5}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3-\sqrt{5}$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-6x+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $x^2-6x+4\geq 0$ pour $x\in]-\infty;3-\sqrt{5}]\cup[3+\sqrt{5};+\infty[$

Donc $D_g =]-\infty;3-\sqrt{5}]\cup[3+\sqrt{5};+\infty[$

3) Sur $]-\infty;3-\sqrt{5}]$ Soient $x,y\in]-\infty;3-\sqrt{5}]$ tels que $x\leq y\leq 3-\sqrt{5}$ ainsi : $x-3\leq y-3\leq -\sqrt{5}\leq 0$ donc par décroissance de la fonction carrée sur $]-\infty;0]$ on a :

$5\leq (y-3)^2\leq (x-3)^2$ donc $0\leq (y-3)^2-5\leq (x-3)^2-5$ soit $0\leq y^2-6y+4\leq x^2-6x+4$ par croissance de la fonction racine sur $[0;+\infty[$

On a : $\sqrt{y^2-6y+4}\leq\sqrt{x^2-6x+4}$ soit $g(y)\leq g(x)$ donc g est décroissante sur $]-\infty;3-\sqrt{5}]$

Sur $[3+\sqrt{5};+\infty[$ Soient $x,y\in[3+\sqrt{5};+\infty[$ tels que $3+\sqrt{5}\leq x\leq y$ ainsi : $\sqrt{5}\leq x-3\leq y-3$ donc par croissance de la fonction carrée sur $[0;+\infty[$ on a :

$5\leq (x-3)^2\leq (y-3)^2$ donc $0\leq (x-3)^2-5\leq (y-3)^2-5$ soit $0\leq x^2-6x+4\leq y^2-6y+4$ par croissance de la fonction racine sur $[0;+\infty[$

On a : $\sqrt{x^2-6x+4}\leq\sqrt{y^2-6y+4}$ soit $g(x)\leq g(y)$ donc g est croissante sur $[3+\sqrt{5};+\infty[$

4) Soit $x\geq 3$ $x-g(x)=$
$x-\sqrt{x^2-6x+4} = \dfrac{(x-\sqrt{x^2-6x+4})(x+\sqrt{x^2-6x+4})}{x+\sqrt{x^2-6x+4}} = \dfrac{x^2-(x^2-6x+4)}{x+\sqrt{x^2-6x+4}} =$

$$\frac{6x-4}{x+\sqrt{x^2-4x+2}} = \frac{2(3x-2)}{x+\sqrt{x^2-6x+4}} \geq 0$$