Test d'entrée TW3 : 1ère/Terminale

Mathématiques (Programme de 1ère)

Candidature année de 1ère / Début de terminale

Définitions :

Donner la définition des termes :

1) Racine carrée :
2) Entier pair et entier impair
3) Nombres rationnels
4) Fonction croissante sur un intervalle I
5) Fonction affine
6) Suite croissante
7) Equation du second degré
8) Trinôme

Si vous ne connaissez pas ces définitions alors elles vous seront à connaître.

Calcul algébrique :

Cours : Démontrer les formules suivantes

1) Montrer que $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

2) Montrer que $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) = a^5 - b^5$

3) Montrer que $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

4) Montrer que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Bonus : Proposer une factorisation de $a^7 - b^7$

5) Factoriser $x^3 - 1$ et $x^3 + 1$

Ces formules seront dorénavant à connaître.

Second degré :

Cours : Carte d'identité de f définie par $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$

Donner ainsi : $a =$ $b =$ $c =$ $\Delta =$
Forme canonique
Forme factorisée (si possible)
Tableau de signe
Tableau de variations.

Exercice 1 : Résoudre les équations :

1) $x^2 + 4x - 1 = 0$ 2) $x^4 - x^2 - 6 = 0$ 3) $x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

Exercice 2 :

On considère l'équation (E) $x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = 0$

1) Montrer que $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

2) Soit x solution de E. Montrer alors que $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 7\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 8 = 0$

3) En utilisant le changement de variable $y = x + \dfrac{1}{x}$ résoudre l'équation.

4) Résoudre l'équation : $x^4 - 10x^3 + 23x^2 - 21x + 1 = 0$

Exercice 3 :

Soit f définie par $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$

1) Donner le tableau de signe de f

2) Donner le tableau de variations de f

3) Soit $y \in \left[\dfrac{9}{2}; +\infty\right[$, résoudre l'équatioon $f(x) = y$ sur $\left[\dfrac{-1}{2}; +\infty\right[$.

On appelle cette solution $f^{-1}(y)$.

On définit ainsi la fonction f^{-1} définie sur $\left[\dfrac{9}{2}; +\infty\right[$

4) Calculer $f(f^{-1}(y))$ pour tout $x \in \left[\dfrac{9}{2}; +\infty\right[$

5) Calculer $f^{-1}(f(x))$ pour tout $x \in \left[\dfrac{-1}{2}; +\infty\right[$

Suites :

Exercice 1 : Donner les variations

1) (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n-2}{n+2}$
2) (t_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_{n+1} = t_n^2 + t_n + 1$ et $t_0 = -1$
3) (s_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $s_{n+1} = s_n^2 - 3s_n + 4$ et $s_0 = 1$

Exercice 2 : Suites arithmético-géométriques

On considère (u_n) définie par : $u_{n+1} = 3u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$
1) Calculer u_1.
2) Résoudre l'équation $3x - 1 = x$.
3) On pose la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.
Montrer que (v_n) est géométrique.
4) En déduire l'expression de (v_n) et de (u_n) en fonction de n.

Exercice 3 :

Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 3u_n + 5$ et $u_0 = 1$.
Exprimer u_n en fonction de n

Exercice 4 :

On définit (u_n) définie par $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 3$.
1) Calculer u_1.
2) Résoudre l'équation $\dfrac{3x-1}{x+1} = x$.
3) On pose (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. Montrer que (v_n) est arithmétique.
4) En déduire une expression de (v_n) en fonction de n.
5) En déduire une expression de (u_n) en fonction de n.

Exercice 5 :

Soit (u_n) définie par $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ pour $n \geq 0$ et $u_0 = 1$, $u_1 = 5$
1) Calculer u_2
2) Résoudre l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$. On note r_1 et r_2 les solutions $(r_1 \leq r_2)$
3) Soit (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - r_1 u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique et déterminer v_n en fonction de n
4) Soit (w_n) définie par $w_n = u_{n+1} - r_2 u_n$. Montrer que (w_n) est géométrique et déterminer w_n en fonction de n
5) En déduire u_n en fonction de n.

Etudes de fonctions :

Exercice 1 :

On définit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$

1) Donner le tableau de variation de f

2) Résoudre l'équation $f(x) - xf'(x) = 2$

On note r la solution non nulle de l'équation.

3) Donner l'équation de la tangente en r

4) Etudier la position relative entre C_f la courbe représentative de f et la tangente en r

5) Déterminer toutes les tangentes parallèles à la tangente en r.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3e^x + 1}{e^x + 1}$

1) Donner l'ensemble de définition de f

2) Donner les variations de f

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) + f(-x) = 4$

4) Montrer que $f(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie par $f_n(x) = x^n(1-x)^n$ sur $[0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$

1) Donner le tableau de variation de f. En déduire $\sup\limits_{x\in[0;1]} f_n(x)$

2) Montrer que (u_n) définie par $u_n = \sup\limits_{x\in[0;1]} f_n(x)$ est décroissante.

3) En déduire $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sup\limits_{x\in[0;1]} f_n(x)$

4) Soit f_n définie par $f_n(x) = xe^{-n^2x}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$

Définir la suite (u_n) définie par $u_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} f_n(x)$ et calculer $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} f_n(x)$

Corrigé :

Définitions :

1) Soit a un réel **positif**, on appelle racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$ le réel **positif** $\sqrt{a}$ tel que $\sqrt{a}^2 = a$.

2) Soit n un entier, n est impair s'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$
Soit n un entier, n est pair s'il existe un entier k tel que $n = 2k$

3) On appelle nombre rationnel tout nombre de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers

4) Soit f une fonction définie sur un intervalle I, f est dite croissante si pour tout a et $b \in \text{I}$, tels que $a \geq b$ alors $f(a) \geq f(b)$

5) Une fonction affine f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec a et $b \in \mathbb{R}$. Le nombre a est appelé : coefficient directeur.

6) Soit (u_n) une suite, elle est dite croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$

7) On appelle équation du second degré, toute équation d'inconnue x de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$

8) fonction polynomiale de degré 2, autrement dit : fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et a non nul.

Calcul algébrique :

1) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

2) Même calcul

3) $(a + b)^4 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

4) $(a + b + c)^2 = a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Bonus : $a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$

5) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ et $x^3 + 1 = x^3 - (-1)^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

Second degré :

Cours :

$a = -2 \quad b = -2 \quad c = 4 \quad \Delta = 4$

Forme canonique : $f_2(x) = -2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2\right) = -2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right)$

Forme factorisée : $f_2(x) = -2(x-1)(x+2)$

Tableau de variation de f_2 :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$f_2(x)$		$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f_2(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 1 :

1) $x = -2-\sqrt{5}$ et $x = -2+\sqrt{5}$

2) On pose $y = x^2$ on résout $y^2 - y - 6 = 0$ donc $y = -2$ et $y = 3$. $x^2 = -2$ n'admet pas de solution, $x^2 = 3$ admet deux solutions : $x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$

3) On pose $y = x^2$ on résout $y^2 + 5y + 1 = 0$ donc $y = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$ pas de solution car négatif or $y = x^2$. $y = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$.

L'équation admet donc deux solutions : $\sqrt{\frac{5+\sqrt{29}}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{5+\sqrt{29}}{2}}$

Exercice 2 :

1) $(x+\frac{1}{x})^2 - 2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$

2) x est non nul (0 n'est pas solution de l'équation) donc en divisant par x^2 on obtient l'égalité.

3) D'après la question 1 $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ l'équation devient après changement de variable :

$y^2 - 2 - 7y + 8 = 0$ soit $y^2 - 7y + 6 = 0$ $y = 1$ et $y = 6$, on revient en x :

$x + \dfrac{1}{x} = 1$ soit $x^2 + 1 = x$ soit $x^2 - x + 1 = 0$ pas de solution. $x + \dfrac{1}{x} = 6$ donc $x^2 - 6x + 1 = 0$ on résout etc.

4) On divise par x^2 on obtient l'équation après changement de variable : $y^2 - 10y + 21 = 0$ les solutions sont 7 et 3 on revient en x on résout.

Exercice 3 :

1) On résout tout d'abord l'équation $f(x) = 0$ c'est-à-dire $2x^2 + 2x + 5 = 0$ $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times 5 = -36$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas solutions réelles

Comme $a = 2 \geq 0$ on en déduit le tableau de signe :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	

2) $a \geq 0$ donc f est croissante sur $[\dfrac{-1}{2}; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; \dfrac{-1}{2}]$

De plus $f(\dfrac{-1}{2}) = \dfrac{9}{2}$ on en déduit donc :

t	$-\infty$	$\dfrac{-1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\dfrac{9}{2}$	↗

3) Soit $y \geq \dfrac{9}{2}$ on résout l'équation $f(x) = y$ c'est-à-dire : $2x^2 + 2x + 5 = y$

Soit $3x^2 + 2x + 5 - y = 0$ donc $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times (5 - y) = 4 - 40 + 8y = 8y - 36$ or $y \geq \dfrac{9}{2}$ donc $8y - 36 \geq 0$

L'équation admet donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{8y - 36}}{4} = \dfrac{-1 - \sqrt{2y - 9}}{2}$
et $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{2y - 9}}{2}$
Or $x_1 \notin [\dfrac{-1}{2}; +\infty[$ et $x_2 \in [\dfrac{5}{6}; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution sur $[\dfrac{-1}{2}; +\infty[$ qui est : $\dfrac{-1 + \sqrt{2y - 9}}{2}$

4) par définition de $f^{-1}(y)$ c'est la solution de l'équation $f(x) = y$ donc $f(f^{-1}(y)) = y$

5) $f^{-1}(f(x)) = \dfrac{-1+\sqrt{2f(x)-9}}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{2(2x^2+2x+5)-9}}{2} =$

$= \dfrac{-1+\sqrt{4x^2+4x+1}}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{(2x+1)^2}}{2}$

Or $x \in [\dfrac{-1}{2};+\infty[$ donc $2sx+1 \geq 0$ donc $\sqrt{(2x+1)^2} = 2x+1$ ainsi :

$f^{-1}(f(x)) = \dfrac{-1+2x+1}{2} = x$

Suites :

Exercice 1 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ On calcule $w_{n+1} - w_n = \dfrac{n+1-2}{n+1+2} - \dfrac{n-2}{n+2} = \dfrac{n-1}{n+3} - \dfrac{n-2}{n+2} = \dfrac{(n-1)(n+2)-(n-2)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{n^2+n-2-n^2-n+6}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{6}{(n+2)(n+3)} \geq 0$ Donc (w_n) est croissante.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ On calcule $t_{n+1} - t_n = t_n^2 + t_n + 1 - t_n = t_n^2 + 1 \geq 0$ donc (t_n) est croissante.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ On calcule $s_{n+1} - s_n = s_n^2 - 3s_n + 4 - s_n = s_n^2 - 4s_n + 4 = (s_n - 2)^2 \geq 0$ donc (s_n) est croissante.

Exercice 2 :

1)$u_1 = 3 - 1 = 2$ 2) $3x - 1 = x$ donc $x = \dfrac{1}{2}$

3) $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{2} = 3u_n - 1 - \dfrac{1}{2} = 3u_n - \dfrac{3}{2} = 3(u_n - \dfrac{1}{2}) = 3v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison 3.

4) $v_0 = u_0 - \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.Donc $v_n = \dfrac{1}{2} \times 3^n$ donc $u_n = v_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \times 3^n + \dfrac{1}{2}$

Exercice 3 :

On résout l'équation $3x + 5 = x$ soit $x = \dfrac{-5}{2}$

On pose $v_n = u_n + \dfrac{5}{2}$, (v_n) est géométrique de raison 3 (le montrer) $v_0 = \dfrac{9}{2}$ et dpnc $u_n = \dfrac{9}{2} \times 3^n - \dfrac{5}{2}$

Exercice 4 :

1) $u_1 = \dfrac{3u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{9-1}{2} = 4$

2) $\dfrac{3x-1}{x+1} = x$ donc $3x - 1 = x(x+1)$ donc $x^2 - 2x + 1 = 0$ donc $(x-1)^2 = 0$ donc $x = 1$

3) $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{\frac{3u_n - 1}{u_n + 1} - 1} = \dfrac{u_n + 1}{3u_n - 1 - u_n - 1} = \dfrac{u_n + 1}{2u_n - 2} = \dfrac{u_n - 1 + 2}{2u_n - 2} = \dfrac{u_n - 1}{2(u_n - 1)} + \dfrac{2}{2(u_n - 1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1}{2} + v_n$. On a donc : $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} + v_n$.

Donc (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$

4) $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{2}$ donc $v_n = \dfrac{1}{2}n + \dfrac{1}{2}$.

5) $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ donc $u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n}$ donc $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}(n+1)} + 1 = \dfrac{2}{n+1} + 1$

Donc $u_n = \dfrac{n+3}{n+1}$

Exercice 5 :

1) $u_2 = 2u_1 + 3u_0 = 10 + 3 = 13$

2) $x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$

L'équation admet deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x = \dfrac{2+4}{2} = 3$

3) $v_n = u_{n+1} + u_n$ $(r_1 = -1)$ donc $v_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = 2u_{n+1} + 3u_n + u_{n+1} = 3(u_{n+1} + u_n) = 3v_n$ Donc $v_{n+1} = 3v_n$, donc (v_n) est géométrique de raison 3

$v_0 = u_1 + u_0 = 5 + 1 = 6$ donc $v_n = 6 \times 3^n$ 4) $w_n = u_{n+1} - 3u_n$ donc $w_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1} = 2u_{n+1} + 3u_n - 3u_{n+1} = -u_{n+1} + 3u_n = -w_n$ Donc $w_{n+1} = -w_n$, donc (w_n) est géométrique de raison -1

$w_0 = u_1 - 3u_0 = 5 - 3 = -2$ donc $w_n = -2 \times (-1)^n$

5) $v_n - w_n = u_{n+1} + u_n - (u_{n+1} - 3u_n) = 4u_n$ donc $u_n = \dfrac{1}{4}(6 \times 3^n + 2 \times (-1)^n)$

Fonctions :

Exercice 1 :

1) On calcule la dérivée, $f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$, on étudie le signe de la dérivée, f' est un trinôme donc : $\Delta = (-8)^2 - 3 \times 4 \times 1 = 64 - 12 = 52$

f' admet donc 2 racines : $x_1 = \dfrac{8 - 2\sqrt{13}}{6} = \dfrac{4 - \sqrt{13}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{13}}{3}$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	

2) On résout l'équation $f(x) - xf'(x) = 2$:

$x^3 - 4x^2 + x + 2 - x(3x^2 - 8x + 1) = 2$ soit $x^3 - 4x^2 + x - x(3x^2 - 8x + 1) = 0$

Soit $x(x^2 - 4x + 1 - 3x^2 + 8x - 1) = 0$ soit $x^2(-2x + 4) = 0$ les solutions de l'équation sont donc 0 et 2.

3) La solution non nulle est $r = 2$. On va appliquer la formule de l'équation de la tangente en $r = 2$ donc : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

On calcule $f'(2) = 3\times 2^2 - 8\times 2 + 1 = 12 - 16 + 1 = -3$ donc $y = -3(x-2) + f(2) = -3x - 6 + f(2)$ or $-3 \times 2 + f(2) = f(r) - f'(r)r = 2$ donc l'équation de la tangente est $y = -3x + 2$

4) On veut savoir quand C_f est au dessus ou en dessous de T_r la tangente, donc on étudie le signe de la fonction h définie par $h(x) = f(x) - (-3x + 2)$:

$h(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2 - (-3x + 2) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$ ainsi les signe de $h(x)$ est celui de x donc C_f est en dessous de la tangente en 2 sur $]-\infty; 0]$ et au dessus sur $[0; +\infty[$

5) Une tangente est une droite, donc elle représente une fonction affine, or deux fonctions affines sont représentées par des droites parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. Ainsi la tangente en un point x est parallèle à la tangente en 2 si $f'(x) = f'(2) = -3$.

On résout l'équation $f'(x) = -3$ soit : $3x^2 - 8x + 1 = -3$

$3x^2 - 8x + 4 = 0$. $\Delta = 64 - 4 \times 3 \times 4 = 8(8 - 6) = 16$ ainsi l'équation admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{8-4}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{8+4}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$

Ainsi la seule tangente parallèle à la tangente en 2 est la tangente en $\dfrac{1}{3}$

Exercice 2 :

1) Il faut que e^x+1 ne s'annule pas or e^x est strictement positif donc $e^x+1 \neq 0$ quelque soit $x \in \mathbb{R}$ ainsi $D_f = \mathbb{R}$

2) f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et de dérivée :
$f'(x) = \dfrac{3e^x(e^x+1) - e^x(3e^x+1)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$

3) On calcule $f(x)+f(-x) = \dfrac{3e^x+1}{e^x+1} + \dfrac{2e^{-x}+1}{e^{-x}+1} = \dfrac{(3e^x+1)(e^{-x}+1)+(3^e-x+1)(e^x+1)}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} =$
$\dfrac{3+3e^x+e^{-x}+1+3+3e^{-x}+e^x+1}{2+e^x+e^{-x}} = \dfrac{8+4e^x+4e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}} = 4$

4) $f(x) = \dfrac{3e^x+1}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1+2e^x}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1}{e^x+1} + \dfrac{2e^x}{e^x+1} = 1 + \dfrac{2e^x}{e^x+1}$

Remarque : On aurait pu partir de la réponse mais partir de l'inconnu vous rendra indépendant de la formulation de la question et vous êtes désormais capable de déterminer des primitives de fonctions de la forme $f(x) = \dfrac{ae^x+b}{ce^x+d}$

Exercice 3 :

1) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$ et :
$f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x)^n - nx^n(1-x)^{n-1}$
Donc $f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-x-x) = nx^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x)$ On en déduit le tableau de variations

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		$\nearrow$	$f_n(\frac{1}{2})$	$\searrow$	

Donc $\sup\limits_{x \in [0;1]} f_n(x) = f_n(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^n(1-\frac{1}{2})^n = \dfrac{1}{4^n}$

2) $u_n = \sup\limits_{x \in [0;1]} f_n(x) = \dfrac{1}{4^n}$ donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{4^{n+1}} - \dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{4^n}(\dfrac{1}{4} - 1) = \dfrac{1}{4^n} \times \dfrac{-3}{4} \leq 0$ donc (u_n) est décroissante.

3) Donc comme (u_n) est décroissante, la plus grande valeur prise par u_n est

en $n=1$ donc $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\sup\limits_{x\in[0;1]} f_n(x)=u_1=\dfrac{1}{4}$

4) $f_n'(x)=e^{-n^2x}(1-2nx^2)$ ainsi on en déduit :

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		$\nearrow$	$f_n(n)$	$\searrow$	

Donc $u_n=f_n(\dfrac{1}{\sqrt{2n}})=\dfrac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}$. Donc : $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} f_n(x)=u_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$