Test d'entrée TW3 : 2nde/1ère

Mathématiques (Programme de seconde)

Candidature année de seconde / Début de 1ère

Définitions :

Donner la définition des termes :

1) Racine carrée :

2) Entier pair et entier impair

3) Nombres rationnels

4) Fonction croissante sur un intervalle I

5) Fonction décroissante sur un intervalle I

6) Fonction affine

Si vous ne connaissez pas ces définitions alors elles vous seront à connaître.

Calcul algébrique :

Cours : Démontrer les formules suivantes

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

5) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Ces formules seront dorénavant à connaître.

Développement et factorisation :

1) Développer : 1) $(x-3)(x-5)$ 2) $(x-2)(x-7)$ 3) $(x-4)(x+5)$

2) Développer : 1) $(2x+1)^2$ 2) $(3x^2+2)$ 3) $(4x-1)^2$

3) Factoriser : 1) $4x+4y$ 2) $6x^2+4x$ 3) $7x^3-2x$

4) Factoriser : 1) x^2-4 2) $4x^2-1$ 3) x^2-7 4) $5x^2-1$ 5) x^4-9

Fraction

1) Simplifier : 1) $\dfrac{40}{15}$ 2) $\dfrac{39}{15}$ 3) $\dfrac{7a^2}{5ab}$

2) Simplifier : 1) $\dfrac{3xy+x}{9y^2+3y}$ 2) $\dfrac{ax-ay}{x-y}$ 3) $\dfrac{x^2-1}{3x+3}$

Racine carrée :

1) Simplifier : 1) $\sqrt{50}$ 2) $\sqrt{8}$ 3) $\sqrt{98}$

Exercice :

1) Développer $(\sqrt{11}-7)(\sqrt{11}+7)$

2) En déduire le signe de $\sqrt{11}-7$

3) En adaptant les questions précédentes déterminer le signe de : $5\sqrt{2}-7$

Equations :

1) Résoudre les équations suivantes :

1) $6x+1=2x-4$ 2) $4x-1=x+2$ 3) $x+2=0$

2) Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2-4=0$ 2) $x^2-5=0$ 3) $2x^2-3=0$

Exercice : Résolution de $4x^2+12x-16=0$

1) Développer $(2x+3)^2-25$

2) En déduire une factorisation de $4x^2+12x-16$

3) Résoudre l'équation : $4x^2+12x-16=0$

Fonctions :

Exercice 1 :

Donner l'ensemble de définitions et le tableau de signes des fonctions suivantes

1) $f(x) = \sqrt{5x^2 + 2}$ 2) $g(x) = \dfrac{6x-7}{7x-5}$

3) $h(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2-4}$ 4) $j(x) = \sqrt{\dfrac{6x-5}{x^2-5}}$

Exercice 2 :

Etude de f définie par $f(x) = x^2 - 5x - 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

1) Développer $\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{37}{4}$ (0,5 point)

2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$

3) Déterminer le signe de f

4) Déterminer les variations de f sur $]-\infty; \frac{5}{2}]$ et sur $[\frac{5}{2}; +\infty[$

5) Déterminer l'ensemble de définition de h définie par $h(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 3}$

6) Etudier la position relative entre f et la fonction g définie par $g(x) = -5x+8$

Exercice 3 :

Etude de f définie par $f(x) = \dfrac{9x-5}{3x-1}$

1) Donner l'ensemble de définition D_f de f

2) Donner le tableau de signe de f

3) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = 3 - \dfrac{2}{3x-1}$

4) En déduire les variations de f sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ et sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$

5) Résoudre l'équation $f(x) = 2$

Corrigé :

Mise en garde :

Il s'agit d'un corrigé succint, vous devez rédiger entièrement.

Définitions :

1) Soit a un réel **positif**, on appelle racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$ le réel **positif** $\sqrt{a}$ tel que $\sqrt{a}^2 = a$.

2) Soit n un entier, n est impair s'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$
Soit n un entier, n est pair s'il existe un entier k tel que $n = 2k$

3) On appelle nombre rationnel tout nombre de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers

4) Soit f une fonction définie sur un intervalle I, f est dite croissante si pour tout a et $b \in$ I, tels que $a \geq b$ alors $f(a) \geq f(b)$

5) Soit f une fonction définie sur un intervalle I, f est dite décroissante si pour tout a et $b \in$ I, tels que $a \geq b$ alors $f(b) \geq f(a)$ 6) Une fonction affine f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec a et $b \in \mathbb{R}$. Le nombre a est appelé : coefficient directeur.

Calcul algébrique :

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Démonstration : $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Démonstration : $(a+b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Démonstration : $(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$

4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Démonstration : $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

5) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Démonstration : $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3 = a^3-b^3$

Développement factorisation :

Développer :

1) $x^2 - 8x + 15$; 2) $x^2 - 9x + 14$; 3) $x^2 + x - 20$

Développer :

1) $4x^2 + 4x + 1$; 2) $9x^4 + 12x^2 + 5$; 3) $16x^2 - 8x + 1$

Factoriser :

1) $4(x + y)$; 2) $2x(3x + 2)$; 3) $x(7x^2 - 2)$

Factoriser :

1) $(x-2)(x+2)$; 2) $(2x-1)(2x+1)$; 3) $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$; 4) $(\sqrt{5}x-1)(\sqrt{5}x+1)$;
5) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$

Fractions :

Simplifier :

1) $\dfrac{8}{3}$; 2) $\dfrac{13}{5}$; 3) $\dfrac{7a}{5b}$

Simplifier :

1) $\dfrac{x}{3y}$; 2) a ; 3) $\dfrac{x-1}{3}$

Racines carrées :

1) $5\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{2}$; 3) $7\sqrt{2}$

Exercice 1 :

1) $(\sqrt{11} - 7)(\sqrt{11} + 7) = 11 - 49 = -38$

2) $\sqrt{11} - 7 = \dfrac{(\sqrt{11} - 7)(\sqrt{11} + 7)}{\sqrt{11} + 7} = \dfrac{-38}{\sqrt{11} + 7} \leq 0$

3) $5\sqrt{2} - 7 = \dfrac{(5\sqrt{2} - 7)(5\sqrt{2} + 7)}{5\sqrt{2} + 7} = \dfrac{1}{5\sqrt{2} + 7} \geq 0$

Equations :

1)

1) $x = \dfrac{-5}{4}$; 2) $x = 1$; 3) $x = -2$

2)

1) $x = 2$ ou $x = -2$; 2) $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$; 3) $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Exercice 1 :

1) $4x^2 + 12x - 16$
2) $4x^2 + 12x - 16 = (2x+3)^2 - 25 = (2x+3-5)(2x+3+5) = (2x-2)(2x+8)$
3) $x = 1$ et $x = -4$

Fonctions :

Exercice 1 :

1) $D_f = \mathbb{R}$ et f est positive car racine carrée.

2) $D_g =]-\infty; \frac{5}{7}[\cup]\frac{5}{7}; +\infty[$

x	$-\infty$		$\frac{5}{7}$		$\frac{6}{7}$		$+\infty$
$6x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$7x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{6x-7}{7x-5}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

3) $D_h =]-\infty; 2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2+5		$+$		$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

4) On étudie le signe de $\dfrac{6x-5}{x^2-5}$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\frac{5}{6}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$6x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+\sqrt{5}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{5}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{6x-1}{x^2-5}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Ainsi $D_j =]-\sqrt{5}; \frac{5}{6}] \cup]\sqrt{5}; +\infty[$

Et j est positive car une racine carrée est toujours positive.

Exercice 2 :

1) $(x-\frac{5}{2})^2 - \frac{37}{4} = x^2 - 5x + \frac{25}{4} = x^2 - 5x - \frac{12}{4} = x^2 - 5x - 3$

2) $x = \frac{5-\sqrt{37}}{2}$ et $x = \frac{5+\sqrt{37}}{2}$

3)

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{37}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{37}}{2}$		$+\infty$
$x - \frac{5+\sqrt{37}}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - \frac{5+\sqrt{37}}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-5x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

4) Sur $]-\infty; \frac{5}{2}]$:

Soient $x, y \in]-\infty; \frac{5}{2}]$ tels que $x \leq y \leq \frac{5}{2}$:

$x - \frac{5}{2} \leq y - \frac{5}{2} \leq 0$

Par décroissance de la fonction carrée sur $]-\infty; 0]$:

$(y-\frac{5}{2})^2 \leq (x-\frac{5}{2})^2$ donc :

$(y - \frac{5}{2})^2 - 3 \leq (x - \frac{5}{2})^2 - 3$ soit $f(y) \leq f(x)$

Donc f est décroissante sur $]-\infty; \frac{5}{2}]$

f est croissante sur $[\frac{5}{2}; +\infty[$ (raisonnement identique, différence : la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$

5) $D_f]-\infty; \frac{5-\sqrt{37}}{2}] \cup [\frac{5+\sqrt{37}}{2}; +\infty[$

6) On étudie le signe de la différence : $f(x) - g - (x) = x^2 + 5 \geq 0$ donc C_f est toujours au dessus de C_g

Exercice 2 :

1) $D_f =]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[$

2)

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{9}$		$+\infty$
$9x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{9x-5}{3x-1}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

3) $f(x) = \frac{9x-5}{3x-1} = \frac{9x-3-2}{3x-1} = \frac{3(3x-1)}{3x-1)} - \frac{2}{3x-1} = 3 - \frac{2}{3x-1}$

4) Sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$: Soient $x, y \in]-\infty; \frac{1}{3}[$ tels que $x \leq y < \frac{1}{3}$

$3x \leq 3y < 1$ donc $3x - 1 \leq 3y - 1 < 0$, par décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty; 0[$:

$\frac{1}{3y-1} \leq \frac{1}{3x-1}$, en multipliant par -2 :

$\frac{-2}{3x-1} \leq \frac{-2}{3y-1}$ donc $3 - \frac{2}{3x-1} \leq 3 - \frac{2}{3y-1}$ soit $f(x) \leq f(y)$ donc f est croissante sur $]-\infty; 0[$

Idem sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$

5) $f(x) = 2$ donc $3x - 1 = 18x - 10$ donc $15x = 9$ donc $x = \frac{3}{5}$